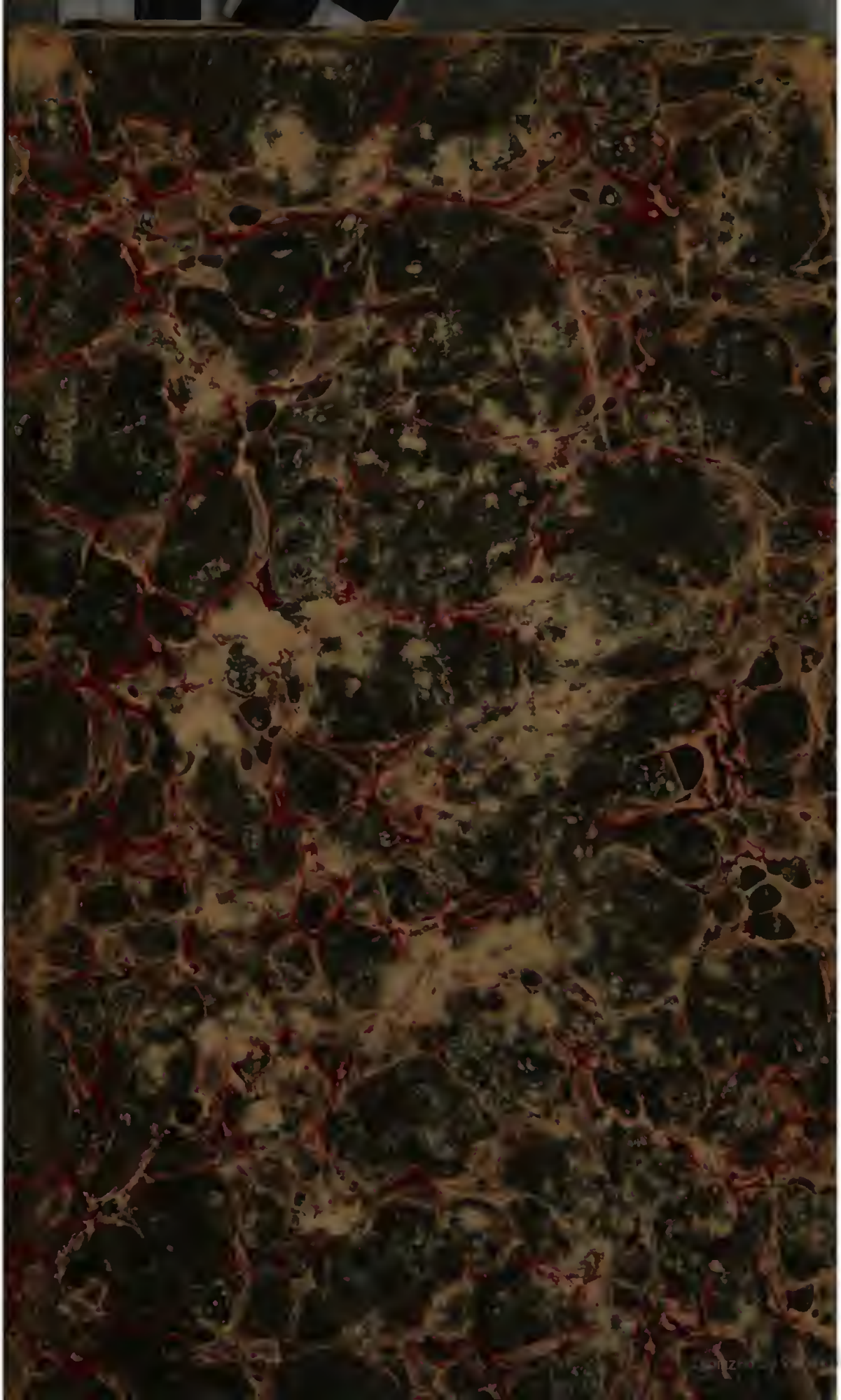


FONDO PROVINCIA

28770

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio B

Palchetto F

Num.° d' ordine 18

NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
2693
NAPOLI

Digitized by Google

4947
B. Prov
I
2693

Digitized by Google

Digitized by Google

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

N. B. Le Catalogue général est envoyé franco à toutes les personnes qui en font la demande par lettre affranchie.

En envoyant à M. MALLET-BACHELIER un mandat sur la Poste, les Ouvrages seront adressés *franco* dans toute la France.

ANNÉE SCOLAIRE 1857-1858.

LIBRAIRIE

POUR

LES MATHÉMATIQUES, LA PHYSIQUE, LA CHIMIE, LES ARTS MÉCANIQUES, LES PONTS ET CHAUSSÉES, LA MARINE ET L'INDUSTRIE.

EXTRAIT DU CATALOGUE DES LIVRES DE FONDS ET D'ASSORTIMENT

DE

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

MALLET-BACHELIER,

Gendre et Successeur de Bachelier,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES — DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS — DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE — DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — DU DÉPOT CENTRAL DE L'ARTILLERIE — DE LA SOCIÉTÉ MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE.

ARITHMÉTIQUE.

AMADIEU (P.-F.), directeur de l'École préparatoire de Versailles. — **Traité d'Arithmétique**, à l'usage des Elèves qui se préparent aux Ecoles du Gouvernement. In-8. ..... 4 fr.

BEZOUT. — **Traité d'Arithmétique**, à l'usage de la Marine et de l'Artillerie; avec Notes du baron *Reynaud*. 21e édition; in-8; 1854..... 3 fr. 50 c.

BEZOUT pur. — **Traité d'Arithmétique**, à l'usage de la Marine et de l'Artillerie. 21e édition; in-8; 1854..... 2 fr.

— **Le Même**, suivi des Tables de Poids et Mesures et des Tables de Logarithmes depuis **1** jusqu'à **10 000**..... 2 fr. 50 c.

BOUCHÉ (Auguste), ancien élève de l'Ecole Normale, professeur de mathématiques à l'Ecole supérieure et au lycée d'Angers. — **Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales par un procédé nouveau Nouvelles propriétés des périodes.** In-8; 1857..... 2 fr. 50 c.

BOURDON, ancien examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique. — **Éléments d'Arithmétique**, 30e édition, rédigée conformément aux *nouveaux Programmes* de l'enseignement dans les lycées. In-8; 1857. (*Adopté par l'Université.*)..... 4 fr.

BOVIER-LAPIERRE. — **Arithmétique simplifiée, ou Traité d'Arithmétique** rédigé sur un plan nouveau à l'usage des Ecoles primaires et des Ecoles supérieures In-12..... 1 fr. 50 c.

CONDORCET. — **Moyens d'apprendre à compter avec facilité**, divisés en 12 leçons. Nouvelle édition; in-18; 1854. Broché..... 1 fr. »
Cartonné..... 1 fr. 10 c.

DIEU (**Th.**), professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble. — **Éléments d'Arithmétique**, rédigés suivant les nouveaux Programmes pour l'enseignement secondaire et l'enseignement primaire. In-8; 1852..... 1 fr. 50 c.

FATON (**le P.**), de la Compagnie de Jesus. — **Traité d'Arithmétique théorique et pratique**, en rapport avec les nouveaux *Programmes* d'enseignement, termine par une petite Table de Logarithmes disposée comme les Tables de Callet. Chaque théorie est suivie d'un choix d'Exercices gradués de calcul et d'un grand nombre de Problèmes. Fort vol. in-12; 1854. 2 fr. 75 c.

FINANCE (**Ch.-S.**), maître à l'École primaire supérieure de Saint-Dié (Vosges). — **Arithmétique**, à l'usage des Écoles primaires supérieures, des Ecoles normales primaires, des petits Séminaires, des Communautés religieuses et des Pensions; comprenant les matières exigées pour le brevet d'Instituteur et pour l'admission aux Ecoles des Arts et Metiers. In-12; 1854..... 2 fr. 50 c.

FOGÈRES (**Ludovic De**). — **Arithmétique élémentaire**, rédigée d'après les Notes laissées par M. *Boucharlat*, grand-père de l'auteur. In-12, 1855. ... 1 fr.

FRANCŒUR. — **Traité d'Arithmétique**, appliquée à la Banque, au Commerce, à l'Industrie, etc. In-8..... 4 fr.

GARNIER (**J.-G.**), ancien professeur à l'Ecole Polytechnique. — **Traité d'Arithmétique**, à l'usage d'Elèves de tout âge. 2e edit.; in-8..... 2 fr. 50 c.

GOSSART (Alexandre), sous-inspecteur des Contributions indirectes. — **Sténarithmie ou Abréviation des calculs**, complement indispensable de toutes les Arithmetiques. 2e edition; in-12; 1853 ..... 1 fr.

JARIEZ (**J.**), sous-directeur de l'Ecole d'Arts et Métiers de Châlons-sur-Marne. — **Cours d'Arithmétique**, à l'usage des Elèves des Ecoles d'Arts et Metiers. In-8; 1853..... 3 fr. 50 c.

LACROIX (**S.-F.**), membre de l'Institut. — **Traité élémentaire d'Arithmétique**. 20e édition; in-8..... 2 fr.

LAVAUX (**P.-A.**). — **Traité d'Arithmétique**, à l'usage des Écoles normales primaires, des Ecoles primaires superieures et des Pensions. In-8; 1845. 5 fr.

LECOT (**V.**). — **Récréations Arithmétiques**. In-18; 1853..... 1 fr.

LIONNET (**E.**), agregé de l'Université, professeur de Mathématiques pures et appliquées au Lycée Louis-le-Grand, examinateur suppléant d'admission à l'Ecole Navale. — **Éléments d'Arithmétique**, 3e edition, redigée conformément au *Programme officiel des Lycées*. In-8, avec figures dans le texte; 1857. (*Autorisé par l'Université.*)..... 4 fr.

LIONNET (**E.**). — **Complément des Éléments d'Arithmétique**, comprenant les **Approximations numériques** à l'usage des Candidats aux Ecoles du Gouvernement et au Baccalauréat ès Sciences. (*Autorisé par l'Université.*) 2e ed., in-8; 1857..... 2 fr. 50 c.
— Les **Approximations numériques se vendent separément**..... 1 fr.

PAGNON (**l'Abbé**), ex-professeur. — **Traité d'Arithmétique élémentaire, théorique et pratique**, adapté aux exigences du nouveau *Programme* d'enseignement et contenant un grand nombre de problèmes. In-12; 1856..... 2 fr.

REYNAUD (le baron), examinateur pour l'admission à l'Ecole Polytechnique, à la Marine, à l'Ecole militaire de Saint-Cyr et à l'Ecole forestière. — **Traité d'Arithmétique**, à l'usage des Elèves qui se destinent à ces Ecoles. In-8; 26e edition, revue, corrigée et annotée par M. *Gerono*, professeur de Mathématiques; 1855. (*Adopté par l'Université.*)..... 4 fr.

REYNAUD (le baron). — **Petit Traité élémentaire d'Arithmétique**. In-12. 2 fr.

REYNAUD (le baron). — **Notes sur l'Arithmétique de Bezout**. 20e édition; In-8..... 2 fr. 50 c.

SERRET (**J.-A.**) — **Traité d'Arithmétique**, à l'usage des Élèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole militaire de Saint-Cyr. In-8; 1852..... 5 fr.

SERRET (**J.-A.**). — **Eléments d'Arithmétique**, à l'usage des Candidats au Baccalaureat ès Sciences, à l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr, à l'Ecole Forestière et à l'Ecole Navale, conformes aux *Programmes officiels*. In-8; 1855. 3 fr.

SUZANNE (**P.-H.**), professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne. — **De la manière d'étudier les Mathématiques**. *Première partie*: **Préceptes généraux et Arithmétique**. 2e edition; in-8; 1810..... 5 fr.

TERQUEM (**O.**), professeur. — **Exercices de Mathématiques élémentaires**, à l'usage des Colléges et des aspirants aux Ecoles Militaire, Polytechnique, Forestière et Navale (*Arithm. et Alg.*). In-8; 1842..... 5 fr.

Digitized by Google

TRIPIER (**Louis**), avocat à la Cour impériale de Paris. — **Plus de Multiplication ni de Division, ou Tables ramenant sans l'emploi des logarithmes la multiplication à l'addition et la division à la soustraction.** In-8; 1856. 6 fr.

VIEILLE. — **Théorie générale des approximations numériques**, à l'usage des Candidats aux Ecoles speciales du Gouvernement. In-8; 2e édition, revue, corrigée et augmentée, avec figures dans le texte; 1854..... 3 fr. 50 c.

ALGÈBRE.

AMADIEU (**P.-F.**), directeur d'une Ecole préparatoire à Versailles. — **Notions élémentaires d'Algèbre**, exigées pour l'admission à l'Ecole Navale, à l'Ecole de Saint-Cyr et à l'Ecole Forestière. 2e édition; in-12, avec pl.; 1849... 3 fr.

BOBILLIER (**E.-E.**), chef des études et professeur de Mécanique aux Ecoles nationales d'Arts et Métiers de Châlons et d'Angers. — **Principes d'Algèbre.** 4e edition; in-8; 1857. (*Ouvrage adopté par le Ministre de l'Agriculture et du Commerce pour les Écoles nationales d'Arts et Métiers.*)..... 3 fr. 50 c.

BOURDON. — **Éléments d'Algèbre**, avec Notes signées *Prouhet*. 11e edit.; in-8, 1856. (*Adopté par l'Université*)..... 8 fr.

CATALAN (**E.**) ancien élève de l'Ecole Polytechnique. — **Manuel des Candidats à l'École Polytechnique.** Tome Ier contenant : **Algèbre, Trigonométrie, Géométrie analytique à deux dimensions.** In-18, avec 167 figures intercalées dans le texte; 1857..... 5 fr.

Le tome II est *sous presse*.

CHOQUET, docteur ès Sciences, professeur de Mathématiques, ancien répétiteur à l'École d'Artillerie de la Flèche. — **Traité d'Algèbre.** In-8; 1856. 7 fr. 50 c.

CHOQUET. — **Complément d'Algèbre**, contenant les matières exigées, suivant le *Programme officiel*, pour l'admission à l'Ecole Polytechnique, et qui ne se trouvent pas dans la 5e edition du **Traité élémentaire d'Algèbre** de MM. *Mayer* et *Choquet*. 2e édit.; in-8; 1853..... 2 fr.

COURS ÉLÉMENTAIRE D'ALGÈBRE, rédigé d'après le nouveau *Programme* du Baccalaureat ès Sciences, sous la direction d'un Inspecteur d'Académie, par un *Professeur* du Collége libre de Notre-Dame-de-Rethel. In-12; 1856. 2 fr.

GARNIER (**J.-G.**). — **Éléments d'Algèbre**, à l'usage des Aspirants à l'Ecole Polytechnique (1re section). In-8, avec planches..... 6 fr.

GARNIER (**J.-G.**). — **Analyse algébrique**, faisant suite à la *première section* de l'**Algèbre**. 2e édition; in-8, avec planches; 1814..... 6 fr.

JARIEZ (**J.**), sous-directeur de l'École des Arts et Métiers de Châlons-sur-Marne. — **Notions d'Algèbre et de Trigonométrie**, suivies de quelques applications au Levé des plans, à l'usage des Elèves des Écoles d'Arts et Métiers. In-8, avec pl.; 1847..... 5 fr. 50 c.

LACROIX (**S.-F.**). — **Éléments d'Algèbre**, à l'usage des Candidats aux Ecoles du Gouvernement; 21e edition, revue, corrigée et annotée, conformément aux nouveaux *Programmes* de l'enseignement dans les Lycées, par M. *Prouhet*, professeur de Mathématiques. In-8; 1854..... 6 fr.

LACROIX (**S.-F.**). — **Complément des Éléments d'Algèbre.** 6e édition; revue et corrigée; in-8; 1835..... 4 fr.

LEFÉBURE DE FOURCY, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Leçons d'Algèbre**, 6e edition; In-8; 1850..... 7 fr. 50 c.

LIONNET (**E.**). — **Algèbre élémentaire**, à l'usage des Candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Ecoles du Gouvernement; rédigé conformément aux *Programmes officiels* des Lycées. In-8, avec figures dans le texte; 1855. 3 fr. 50 c.

REYNAUD (**A.-A.-L.**). — **Fragments sur l'Algèbre et la Trigonométrie**, precedés du programme d'un Cours complet de Mathematiques élementaires, à l'usage des élèves de l'Ecole Polymathique, et particulièrement de ceux qui se destinent à l'Ecole Polytechnique. In-8; 1801..... 2 fr. 50 c.

REYNAUD (le baron). — **Notes sur l'Algèbre de Bezout**, à l'usage des Elèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique, à la Marine, à l'Ecole militaire de Saint-Cyr et à l'Ecole Forestière. 7e édition; in-8; 1834 (*Adopté par l'Université.*)..... 4 fr. 50 c.

ROUCHÉ (**Eugène**), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur au Lycée Charlemagne. — **Éléments d'Algèbre** à l'usage des Candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Ecoles speciales. (*Rédigés conformément aux Programmes de l'enseignement scientifique dans les Lycées.*) In-8, avec figures dans le texte; 1857..... 4 fr.

Digitized by Google

SERRET (J.-A.), examinateur pour l'admission à l'Ecole Polytechnique. — **Cours d'Algèbre supérieure**, professé à la Faculté des Sciences de Paris. 2e édition, revue et augmentée; fort vol. in-8, avec pl.; 1854..... 10 fr.

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTÉGRAL ET ANALYSE MATHEMATIQUE.

BOUCHARLAT. — **Calcul différentiel et intégral.** In-8; 1852..... 8 fr.

BRIOSCHI (F.), professeur de Mathématiques appliquées à l'Université royale de Pavie. — **Théorie des Déterminants et leurs principales applications**; traduit de l'italien par M. *Éd. Combescure*, professeur de Mathématiques. In-8, 1856..... 5 fr.

DUBOURGUET. — **Calcul différentiel et intégral.** 2 vol. in-8; 1811... 10 fr.

DUHAMEL. — **Éléments de Calcul infinitésimal.** 2 v. in-8; pl.; 1856. 12 fr.

FRENET, ancien élève de l'Ecole Normale, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal.** Ouvrage destiné aux élèves de l'Ecole Polytechnique, à ceux de l'Ecole Normale, et aux auditeurs des Cours de Mathématiques dans les Facultés des Sciences. In-8 avec planches; 1856..... 5 fr.

GARNIER. — **Calcul différentiel et intégral.** 2 vol. in-8; 1812..... 12 fr.

GAUSS (Ch.-Fr.). — **Méthode des moindres carrés.** Mémoires sur la combinaison des observations. Traduits en français et avec l'autorisation de l'auteur, par M. *J. Bertrand*. In-8; 1855..... 4 fr.

LAGRANGE. — **Théorie des Fonctions analytiques.** Nouvelle édition, revue par M. *A. Serret*, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique. In-4; 1847..... 18 fr.

LAMÉ (G.). — **Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les Surfaces isothermes.** In-8 avec figures dans le texte; 1857..... 5 fr.

LAURENT (l'Abbé). — **Traité de Calcul différentiel.** In-8; 1853.... 7 fr.

STURM, membre de l'Institut. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.** 2 vol. in-8 avec fig. dans le texte; 1857..... 12 fr.
Le tome Ier est publié. Le tome II est *sous presse*.

TIMMERMANS, professeur à la Faculté des Sciences de Gand. — **Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral.** In-8; 1854..... 9 fr.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

BOUCHARLAT (J.-L.), professeur de Mathématiques transcendantes aux Ecoles militaires. — **Théorie des Courbes et des Surfaces du second ordre**, ou **Traité complet d'application de l'Algèbre à la Géométrie.** 3e édition, revue, corrigée et augmentée de **Notes et des principes de la Trigonométrie rectiligne.** In-8, avec planches; 1845..... 8 fr.

BOURDON. — **Application de l'Algèbre à la Géométrie**, comprenant la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions. 5e éd. revue, corrigée et considérablement augm.; fort vol. in-8, avec pl.; 1854. (*Adopté par l'Université*). 7 fr. 50 c.

CAUCHY (Aug.), membre de l'Académie des Sciences. — **Exercices d'Analyse et de Physique mathématique.** 4 volumes in-4°..... 72 fr.
Chaque volume se vend séparément..... 18 fr.

DELISLE (A.), examinateur pour l'admission à l'Ecole Navale, professeur émérite et officier de l'Université, et **GERONO**, professeur de Mathématiques. — **Géométrie analytique.** In-8°, avec pl.; 1853-1854..... 8 fr.

GARNIER (J.-G.), professeur à l'Ecole Polytechnique. — **Géométrie analytique**, ou **Application de l'Algèbre à la Géométrie.** 2e édition; in-8, avec planches; 1813..... 6 fr.

GOURE. — **Théories générales de Géométrie analytique**, appliquées à la discussion des Courbes algébriques de degrés supérieurs. In-8..... 2 fr.

JACOB (C.), capitaine d'artillerie. — **Application de l'Algèbre à la Géométrie**, suivie de la **Discussion des Courbes d'un degré supérieur au second.** In-8, avec planches (2e *tirage*, 1854)..... 5 fr.

LEFÉBURE DE FOURCY. — **Leçons de Géométrie analytique**, comprenant la **Trigonométrie rectiligne et sphérique, les Lignes et les Surfaces des deux premiers ordres.** 5e édition; in-8, avec planches; 1846.... 7 fr. 50 c.

Digitized by Google

LEFÈVRE (**A.**), géomètre en chef du Cadastre. — **Application de la Géométrie à la Mesure des Lignes inaccessibles et des surfaces planes, etc., ou Longiplanimétrie pratique.** In-8, avec 5 planches; 1827..... 5 fr.

LEROY, professeur à l'École Polytechnique. — **Traité de Stéréotomie**, contenant les applications de la Géométrie descriptive à la théorie des Ombres, la Perspective linéaire, la Gnomonique, la Coupe des Pierres et la Charpente. 2e édition, revue et annotée par M. *E. Martelet*, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures. In-4, avec Atlas de 74 pl. in-fol.; 1857 .... 26 fr.

LEROY. — **Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions.** 4e édition, revue et corrigée; in-8, avec planches; 1854 ..... 5 fr.

MONGE. — **Application de l'Analyse à la Géométrie.** *Cinquième édition*, revue, corrigée et annotée par M. *J. Liouville*, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes. In-4, sur carré superfin des Vosges, avec le portrait de **Monge** et 5 pl.; 1850. (*Édition de luxe*)..... 36 fr.

GÉOMÉTRIE.

BEZOUT. — **Cours de Géométrie**, contenant la **Géométrie**, la **Trigonométrie rectiligne** et la **Trigonométrie sphérique**; avec des Notes sur les **Éléments de Géométrie descriptive** et des **Problèmes**. Avec 22 pl... 7 fr. 50 c.
— **Géométrie pure**, avec 7 planches..... 4 fr » c.
— Les **Notes**, avec 15 planches..... 4 fr. 50 c.

BEZOUT. — **Eléments de Géométrie**, suivis de la **Géométrie démontrée plus rigoureusement**; par *Peyrard*. 7e éd.; In-8, avec pl.; 1832..... 5 fr.

BOBILLIER (**E.**). — **Cours de Géométrie.** 11e édition; in-8, avec figures dans le texte; 1857. (*Ouvrage adopté par le Ministre du Commerce pour les Ecoles d'Arts et Métiers.*) ..... 6 fr. 50 c.

BOVIER-LAPIERRE. — **Cours de Géométrie élémentaire**, à l'usage de la section des Sciences, rédigé conformément aux nouveaux *Programmes* et à l'instruction ministérielle du 15 novembre 1854 sur l'exécution du plan d'études des Lycées. In-12, avec planches; 1855..... 4 fr.

CARNOT (**L.-N.-M.**), membre de l'Institut. — **De la corrélation des figures de Géométrie.** In-5, avec planches; gr. pap.; 1801..... 3 fr.

CLAIRAUT. — **Éléments de Géométrie**, à l'usage des Écoles élémentaires. Nouvelle édition; in-8..... 2 fr 50 c.

DUPIN (Ch.), membre de l'Institut. — **Développements de Géométrie**, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc., pour faire suite à la *Géométrie descriptive* et à la *Géométrie analytique* de **Monge**. 1 vol. in-4, avec planches..... 15 fr.

DUPIN (Ch.). — **Applications de Géométrie et de Mécanique** à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc., pour faire suite aux *Développements de Géométrie*. 1 vol. in-4, avec 17 planches, 1812..... 10 fr.

DUPIN. — **Géométrie appliquée aux Arts.** 1828..... 6 fr.

ESCOUBÈS, ancien préparateur aux Écoles du Gouvernement. — **Compositions mathématiques, ou Problèmes géométriques et trigonométriques, résolus par l'Algèbre et la Géométrie**, à l'usage des Aspirants au Baccalauréat ès Sciences, à l'Ecole militaire de Saint-Cyr, à l'Ecole Navale, à l'Ecole Forestière et à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. In-8, avec pl.; 1854. 2 fr. 25 c.

FAYET. — **Programmes de Géométrie élémentaire, ou Énoncé des principaux Théorèmes de la Géométrie élémentaire.** In-8..... 1 fr.

GARNIER. — **Éléments de Géométrie**, comprenant les deux **Trigonométries**, une **Indroduction à la Géométrie descriptive**, les **Éléments de la Polygonométrie** et quelques **Notions sur le levé des Plans.** In-8, avec planches; 1812..... 6 fr.

GAUSS. — **Recherches générales sur les Surfaces courbes.** Traduit du latin par M. **A.**, ancien élève de l'Ecole Polytechnique. In-8; 1852..... 2 fr.

GUIMBERTEAUD, licencié ès Sciences Mathématiques. — **Éléments de Géométrie**, renfermant plusieurs parties neuves. In-8, avec planches; 1855. 4 fr.

JONQUIÈRES (**E. de**), lieutenant de vaisseau. — **Mélanges de Géométrie pure**, comprenant diverses applications des théories exposées dans le **Traité de Géométrie supérieure** de M. *Chasles*, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux sections coniques, aux courbes du troisième ordre, etc., et la traduction du **Traité** de *Maclaurin* **sur les Courbes du troisième ordre.** In-8, avec planches; 1856..... 5 fr.

LACROIX (**S.-F.**), — **Éléments de Géométrie.** — 1re Partie, *Géométrie plane.* CLASSE DE TROISIÈME. — 2e Partie, *Géométrie dans l'espace.* CLASSE DE SECONDE. — 3e Partie, *Complément de Géométrie.* CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES. — 4e Partie. *Notions sur les courbes usuelles.* CLASSE DE RHÉTORIQUE. 17e édition, conforme aux *Programmes* de l'enseignement dans les Lycées, revue et corrigée par M. *Prouhet,* professeur de Mathématiques. In-8, avec 220 figures dans le texte; 1855..... 4 fr.

LIONNET (**E.**). — **Éléments de Géométrie.** 3e édition; 1 vol. in-8; 1846. (*Autorisé par l'Université.*)..... 5 fr.

MASCHERONI. — **Géométrie du compas;** traduit de l'italien, par M. *Carette,* officier supérieur du Génie. 2e édition, augmentée d'une Notice biographique sur l'auteur; in-8, avec planches; 1828..... 7 fr.

MASCHERONI. — **Problèmes de Géométrie pratique pour les Arpenteurs.** Traduit de l'italien; 2e édition in-8; 1838..... 3 fr. 50 c.

MAUDUIT, professeur de Mathématiques de l'ancienne Académie d'architecture. — **Leçons de Géométrie théorique et pratique.** Nouvelle édition, 2 vol. in-8, avec planches; 1817..... 10 fr.

NICOLLET (**J.-N.**). — **Géométrie, Trigonométrie, Applications diverses.** In-8; 1830..... 5 fr.

OLIVIER (Théodose), professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers. — **Théorie géométrique des Engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation entre deux axes situés ou non situés dans un même plan.** In-4, avec planches; 1842..... 8 fr.

REGNAULT (**J.-J.**), professeur de Mathématiques. — **Traité de Géométrie pratique,** comprenant les **Opérations graphiques** et de nombreuses **Applications aux travaux d'Art et de Construction.** In-8, avec pl.; 1842.... 5 fr.

REYNAUD (le baron), examinateur pour l'admission à l'Ecole Polytechnique. — **Théorèmes et problèmes de Géométrie,** suivis de la **Théorie des Plans et des Préliminaires de la Géométrie descriptive,** comprenant la partie exigée pour l'admission à l'Ecole Polytechnique, à l'usage des Elèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique, à la Marine, à l'Ecole militaire de Saint-Cyr et à l'Ecole Forestière. 10e édition, augmentée de problèmes de Géométrie qui ont été proposés dans les concours des Colleges royaux; in-8, avec planches; 1838. (*Adopté par l'Université.*)..... 5 fr.

SERRET (**Paul**), professeur. — **Des Méthodes en Géométrie.** In-8 avec fig. dans le texte; 1856..... 6 fr.

VINCENT et BOURDON. — **Cours de Géométrie élémentaire.** 5e édition; in-8, avec planches; 1844. (*Adopté par l'Université.*)..... 7 fr.

VINCENT, membre de l'Institut et **SAIGEY.** — **Géométrie élémentaire,** refaite sur la première édition publiée en 1826, et rédigée suivant les principes du nouveau *Programme* des études. In-12, avec planches; 1855.... 2 fr. 50 c.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

AMADIEU (**P.-F.**). — **Notions élémentaires de Géométrie descriptive,** exigées pour l'admission aux diverses Ecoles du Gouvernement. In-8, avec planches. 2 fr. 50 c.

AMIOT, professeur de Mathématiques au Lycée Saint-Louis. — **Leçons nouvelles de Géométrie descriptive.** 2 vol. in-8; 1853..... 6 fr.

JARIEZ (**J.**). — **Cours de Géométrie descriptive.** In-8; 1846..... 5 fr.

LACROIX (**S.-F.**). — **Essais de Géométrie sur les Plans et les Surfaces courbes** (**Éléments de Géométrie descriptive**). 7e édition, revue et corrigée; in-8, avec planches; 1840..... 3 fr.

LEFÉBURE DE FOURCY. — **Traité de Géométrie descriptive.** 2 vol. in-8; 1847..... 10 fr.

LEROY. — **Traité de Géométrie descriptive.** 4e édition, revue et annotée par M. *Martelet,* professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures. In-4, avec Atlas de 71 pl.; 1855..... 16 fr.

MONGE. — **Géométrie descriptive.** In-4; 1847..... 12 fr.

TRIGONOMÉTRIE.

BOURDON. — **Trigonométrie rectiligne et sphérique,** rédigée conformément aux nouveaux *Programmes* de l'enseignement dans les Lycées. In-8, avec figures dans le texte; 1854. (*Adopté par l'Université.*)..... 3 fr.

BOURGEOIS (Ch.) et **CABART**, anciens élèves de l'Ecole Polytechnique, professeurs au collége Stanislas — **Leçons nouvelles sur les Applications pratiques de la Géométrie et de la Trigonométrie**, à l'usage des Candidats au Baccalauréat ès Sciences et à l'Ecole Polytechnique. 2e édition; in-8, avec planches; 1857..... 3 fr. 50 c.

DELATOUCHE (Gustave), professeur de Mathématiques. — **Trigonométrie rectiligne**, à l'usage des Elèves qui se destinent aux Ecoles du Gouvernement. 3e édition, revue et augmentée; in-12, avec pl.; 1852..... 3 fr. 50 c.

DELISLE et **GERONO**. — **Éléments de Trigonométrie rectiligne et sphérique.** 4e édition, revue et augmentée; in-8, avec planches; 1855. 3 fr. 50 c.

LACROIX (S.-F.). — **Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie.** 10e édition, revue et corrigée; in-8, avec planches; 1852..... 4 fr.

LAMBERT (César). — **Trigonométrie rectiligne**, suivie de **Tables de Logarithmes pour les nombres et les lignes trigonométriques**, à l'usage des candidats qui se destinent aux Ecoles du Gouvern. 2e éd.; in-8, pl.; 1814. 4 fr. 50 c.

LEFÈVRE.— **Manuel de Trigonométrie**, servant de guide aux jeunes ingénieurs qui se destinent aux opérations géodesiques, suivi de diverses solutions de Géométrie pratique, etc. In-8, avec planches..... 5 fr.

RÉYNAUD (le baron). — **Trigonométrie rectiligne et sphérique.** 3e édition, suivie des **Tables de Logarithmes des Nombres**; in-18, avec pl., 1818. 3 fr.

SERRET (J.-A.).—**Traité de Trigonométrie.** 2e édition; in-8, avec planches. 1857..... 4 fr.

Le **Traité de Trigonométrie** de M. Serret est composé de six Chapitres. Les quatre premiers comprennent toutes les matières exigées pour l'admission à l'Ecole Polytechnique et aux autres écoles du Gouvernement. Le cinquième Chapitre renferme une théorie complète des fonctions qui naissent de la considération du Cercle. Enfin le sixième Chapitre, qui suppose des connaissances mathématiques plus étendues, se rapporte à la résolution des Triangles par la voie des séries: on y trouve la solution de divers cas particuliers qui se présentent fréquemment dans l'Astronomie, et pour lesquels les méthodes générales deviennent insuffisantes.

SERRET (J.-A.). — **Éléments de Trigonométrie rectiligne à l'usage des Arpenteurs.** In-8, avec figures dans le texte; 1853..... 2 fr.

TABLES DE LOGARITHMES, ASTRONOMIQUES, COMMERCIALES ET DE NAVIGATION.

BURCKHARDT. — **Table des diviseurs pour tous les nombres du 1er, 2e et 3e million**, avec les nombres premiers qui s'y trouvent. Grand in-4; papier velin; 1817..... 25 fr.

Chaque million se vend séparément 12 francs.

CAILLET (V.), examinateur de la Marine — **Tables de réfractions astronomiques**; precedées d'un Rapport fait au Bureau des Longitudes, par M. *Largeteau*, membre de l'Académie des Sciences (Institut) et du Bureau des Longitudes. In-8..... 2 fr.

CAILLET. — **Tables des Logarithmes et co-Logarithmes des nombres et des Lignes trigonométriques**, disposées de manière à rendre les parties proportionnelles toujours additives; suivies de **Tables astronomiques et nautiques**. In-8..... 9 fr.

CALLET (F.). — **Tables portatives de Logarithmes**, contenant les logarithmes des nombres depuis **1** jusqu'à **108000**, les logarithmes des sinus et tangentes de seconde en seconde pour les cinq premiers degres, de dix en dix secondes pour tous les degrés du quart de cercle, etc. In-8, tirage de 1855.. 15 fr.

DAMOISEAU. — **Tables des satellites de Jupiter**. In-4; 1836..... 15 fr.

DAMOISEAU.— **Tables de la Lune**, formées par la seule théorie de l'attraction et suivant la division de la circonférence en 360 degrés. In-fol.; 1828. 18 fr.

DUCOM. — **Cours complet d'Observations nautiques, avec les Notions nécessaires au Pilotage et au Cabotage**, contenant toutes les connaissances de théorie et de pratique exigées pour les différents grades de la Marine, etc. Deux parties en 1 vol. grand in-8, avec pl. et grav. dans le texte; 1835. 15 fr.

DELAMBRE.— **Tables écliptiques des satellites de Jupiter**, d'après la théorie de Laplace et la totalité des observations faites depuis 1662 jusqu'à l'an 1802. In-4; 1817..... 10 fr.

Digitized by Google

LIAIS (Emmanuel). — **De l'emploi de l'air chauffé comme force motrice.** In-8, avec planches; 1854..... 2 fr.

MONGE. — **Traité élémentaire de Statique**, à l'usage des Ecoles de la Marine. 8e édition conforme à la précédente, revue par M. *Hachette*, membre de l'Institut; et suivie d'une **Note contenant une nouvelle démonstration du parallélogramme des forces**; par M. *Aug. Cauchy*. In-8; 1846..... 4 fr.

POINSOT. — **Éléments de Statique.** 9e édition; 1848..... 6 fr. 50 c.

POISSON (S.-D.), membre de l'Institut. — **Traité de Mécanique.** 2e édition, considérablement augmentée. 2 forts vol. in-8; 1833..... 18 fr.

PRONY (De), membre de l'Institut — **Leçons de Mécanique analytique** données à l'École impériale Polytechnique. 2 vol. in-4; 1810..... 20 fr.

REYNAUD (le baron), examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique, et **GERONO** (C.). — **Traité élémentaire de Statique**, à l'usage des Elèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique et à la Marine. In-8, avec planches; 1838..... 5 fr.

TREDGOLD. — **Traité des Machines à vapeur et de leur application à la navigation, aux mines, aux manufactures, aux chemins de fer, etc.** In-4 et atlas de 25 planches..... 25 fr.

TIMMERMANS. — **Traité de Mécanique rationnelle.** In-8; 1856. 9 fr.

VIEILLE (J.), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis le-Grand. — **Cours complémentaire d'Analyse et de Mécanique rationnelle**; professé à l'Ecole Normale. In-8, avec planches; 1851..... 7 fr.

ASTRONOMIE ET COSMOGRAPHIE.

ARAGO (F.), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Analyse de la Vie et des Travaux de sir William Herschel.** In-18..... 2 fr.

ARAGO. — **Astronomie populaire.** 4 vol. in-8..... 30 fr.
Les 3 premiers vol. sont en vente. Chaque vol. se vend séparément. 7 fr. 50 c.

BIOT, membre de l'Institut — **Traité élémentaire d'Astronomie physique.** 3e édition, entièrement refondue et considérablement augmentée; 5 vol. in-8, avec 94 planches. 1857..... 65 fr.

DELAMBRE. — **Histoire de l'Astronomie ancienne.** 2 v. in-4, pl.; 1817. 25 fr.

DELAMBRE. — **Histoire de l'Astronomie au moyen âge.** 1 vol. in 4, avec planches, 1819..... 20 fr.

DELAMBRE. — **Histoire de l'Astronomie moderne.** 2 volumes in-4, avec pl; 1821..... 30 fr.

DELAMBRE. — **Histoire de l'Astronomie au 18e siècle**; publiée par M. *Mathieu*, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes. In-4, avec planches; 1827..... 20 fr.

DELAMBRE. — **Traité complet d'Astronomie théorique et pratique.** 3 vol. in-4, avec planches; 1814..... 40 fr.

DELAUNAY (Ch.), ingénieur des Mines. — **Cours élémentaire d'Astronomie**, concordant avec les articles du Programme officiel pour l'enseignement de la Cosmographie dans les lycées. 2e édition; in-12, avec pl; 1855.. 7 fr. 50 c.

DERYAUX. — **Découverte de la véritable Astronomie**, basée sur la loi commune au mouvement des corps. In 8; 1855..... 3 fr.

DU MONCEL (Th.). — **Théorie des Éclairs.** In-8; 1854..... 1 fr.

FRANCŒUR (L.-B.). — **Uranographie, ou Traité élémentaire d'Astronomie**, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, des Géographes, des Marins, des Ingénieurs, accompagnée de Planisphères. 6e édit., revue, corrigée et augmentée d'une **Notice sur la Vie et les Ouvrages de l'Auteur**, par M. *Francœur* fils, professeur de Mathématiques à l'Ecole des Beaux-Arts. (Dédiée à M. *F. Arago*.) In-8, avec pl.; 1853..... 10 fr.

HANSEN, directeur de l'observatoire de Gotha. — **Mémoire sur la détermination des Perturbations absolues dans les ellipses d'une excentricité et d'une inclinaison quelconques**; traduit de l'allemand par M. *Victor Mauvais*, membre de l'Académie des Sciences. Grand in-8; 1845..... 5 fr.

HARANT (H.), licencié ès Sciences, et **LAFFITTE** (P.), professeur de Mathématiques. — **Leçons de Cosmographie**, *rédigées d'après les Programmes arrêtés par la Commission chargée des attributions du Conseil de perfectionnement et approuvés par le Ministre de la Guerre*. In-8, avec planches; 1853... 3 fr. 50 c.

Digitized by Google

IMBART (E.-F.), architecte, professeur de Lavis et de Topographie à l'Ecole militaire de Saint-Cyr. — **De la Mesure du Temps et description de la Méridienne verticale portative du temps vrai et du temps moyen pour régler les pendules et les montres.** Admise à l'Exposition des produits de l'industrie française de l'année 1827. 2e édition, in-12 avec pl., 1857.... 1 fr.

LACROIX (S.-F.).— Introduction à la connaissance de la Sphère. In-18, avec pl.; 1832..... 1 fr. 25 c.

LAPLACE (le marquis **DE**). — **Exposition du Système du Monde.** 6e édition, précédée de l'Eloge de l'Auteur, par M. le baron *Fourrier*. In-4, papier fin, avec portrait; 1835 ..... 15 fr.

LAPLACE (DE). — **Précis de l'Histoire de l'Astronomie.** In-8; 1821. 3 fr.

LEGENDRE (A.-M.), membre de l'Institut. — **Nouvelle méthode pour la détermination des orbites des Comètes.** In-4, avec pl.; 1805..... 10 fr.

LOUPOT (C.), professeur de Mathématiques au Collége de Nîmes. — **Eléments d'Astronomie**, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques. In-8; 1842..... 5 fr. 50 c.

PONTÉCOULANT (G. de), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, colonel au corps d'Etat-major. — **Théorie analytique du Système du Monde.** 2e édit., considérablement augmentée. Tomes I et II; in-8; 1856..... 18 fr.

On vend séparément :

Les tomes III et IV..... 33 fr.
Le tome V..... 18 fr.
Les Suppléments aux livres II et V..... 2 fr. 50 c.
L'ouvrage complet : 4 volumes ..... 50 fr.

La 2e édition des tomes I et II dans laquelle se trouvent les Suppléments des livres II et V forme un **TRAITÉ COMPLET D'ASTRONOMIE PRATIQUE** et peut être considérée comme une Introduction à la **Mécanique céleste** de *Laplace* et un Complément à la **Mécanique** de *Poisson*.

COURS DE MATHEMATIQUES.

BABINET, membre de l'Institut, et **HOUSEL**, professeur de Mathématiques. — **Calculs pratiques, appliqués aux Sciences d'observation.** In 8, avec figures dans le texte; 1857..... 6 fr.

BEYNAC (F.-A.), professeur de Mathématiques. — **Programme détaillé des Connaissances mathématiques, physiques et naturelles**, exigées pour le Baccalauréat ès Sciences et l'admission aux Ecoles Navale, Militaire, Forestière, contenant en outre un grand nombre de Notes, d'Exercices et de Sujets de Compositions donnés à la Faculté des Sciences. In-8; 1855 ..... 3 fr.

DUVIGNAU (V.-J.), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, directeur d'une Ecole préparatoire au Baccalauréat ès Sciences et à l'Ecole impériale de Saint-Cyr. — **BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.** — **Problèmes de Mathématiques et de physique pour la préparation à la Composition**, contenant la plupart des questions proposées aux divers Concours. In-12, avec figures dans le texte; 1854..... 2 fr.

FRANCŒUR. — **Cours complet de Mathématiques pures.** 4e édit. 2 vol. in-8, avec pl.; 183-. (*Ouvrage destiné aux Élèves des Écoles Normale et Polytechnique, et aux Candidats qui se préparent à y être admis.*)..... 12 fr.

GERONO et ROGUET. — **Programme détaillé d'un Cours d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie analytique**, comprenant les connaissances exigées pour l'admission aux Ecoles du Gouvernement, suivi de Notes et des Enoncés d'un grand nombre de problèmes. (La Note IV est intitulée : **Sur la théorie des polynômes homogènes du second degré**, d'après M. *Hermite*, membre de l'Institut.) 4e édit. entièrement refondue. In-8; 1856..... 3 fr. 50 c.

LABOSNE et MARÉCHAL, professeurs de Mathématiques, et **PAINVIN**, docteur ès Sciences mathématiques. — **Cours complet de Mathématiques**, à l'usage des aspirants au Baccalauréat ès Sciences et aux Ecoles du Gouvernement, rédigé d'après les nouveaux *Programmes* et conformément à la dernière circulaire de M. le Ministre de l'Instruction publique. 1re partie, Arithmétique. In-12; 1855..... 3 fr.

2e partie, Algèbre; par M. *Painvin*. In-8; 1856..... 4 fr.

3e partie, Géométrie *sous presse*.

REYNAUD (le baron) — **Traité élémentaire de Mathématiques et de Physique**, suivi de **Notions sur la Chimie et sur l'Astronomie**, à l'usage des élèves qui se préparent aux examens pour le Baccalauréat ès Lettres. 4e édition; 2 vol. in-8, avec pl.; 1844..... 12 fr.

Le tome 1er, comprenant l'Arithmétique, la Géométrie, l'Algèbre et la Trigonométrie, se vend séparément..... 5 fr.

REYNAUD (le baron) et **DUHAMEL**, ancien élève de l'Ecole Polytechnique. — **Problèmes et développements sur diverses parties des Mathématiques.** In-8, avec pl.; 1823..... 6 fr. 50 c.

TONDEUR, professeur de Mathématiques. — **Questionnaires et Exercices préparatoires à la composition et à l'examen du Baccalauréat ès Sciences**, suivis d'un **Recueil de Compositions.** (Rédigés conformément aux *nouveaux Programmes* de l'enseignement dans les Lycées). In-12; 1855..... 2 fr.

SAURI, ancien professeur de Philosophie à l'Université de Montpellier. — **Institutions mathématiques** servant d'Introduction à un **Cours de Philosophie** à l'usage des Universités de France, comprenant : l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie, la Trigonométrie, le Lavé des plans, les Sections coniques, les Courbes en général, le Calcul différentiel et le Calcul intégral. 6e éd.; in-8, avec pl.; 1835..... 5 fr.

CHIMIE.

BARRESWIL et DAVANNE. — **Chimie photographique.** 2e édit. (*Sous presse.*)

BIOT, membre de l'Institut — **Instructions pratiques sur l'observation et la mesure des propriétés optiques appelées rotatoires**, avec l'exposé succinct de leur application à la Chimie médicale, scientifique et industrielle. In-4, avec figures dans le texte; 1845..... 1 fr.

BOUSSINGAULT, membre de l'Institut. — **Mémoires de Chimie agricole et de Physiologie.** In-8, avec planches; 1854..... 7 fr.

BOUSSINGAULT. — **Recherches sur les moyens d'extraire, pour les besoins des arts, le gaz oxygène contenu dans l'air atmosphérique.** In-8, avec pl.; 1852..... 2 fr. 25 c.

CAHOURS (Auguste), examinateur de sortie pour la Chimie à l'École impériale Polytechnique. — **Leçons de Chimie générale élémentaire**, professées à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures. 2 volumes in-18 illustrés de 260 figures sur bois intercalées dans le texte et de 8 planches; 1856.... 12 fr.

« Les personnes qui veulent étudier un Traité élémentaire trouveront dans cet » ouvrage ce qu'elles peuvent désirer. Le style en est toujours clair, et la description » des appareils et des expériences toujours précise et exacte, et à la rigueur elle » pourrait se passer des figures répandues dans le texte, qui sont d'une excellente » exécution. E. CHEVREUL, membre de l'Institut. »

DE LATREILLE (Édouard), Photographe; élève de M. Gustave Le Gray. — **Almanach-Manuel du Photographe, pour l'an 1858.** 2e éd. In-18 avec 3 pl. 50 c.

ÉBELMEN, ingénieur en chef au Corps impérial des Mines, professeur de Docimacie à l'École des Mines de Paris, administrateur de la Manufacture Impériale de Porcelaine de Sèvres. — **Recueil des Travaux scientifiques**, revu et corrigé par M. *Salvétat*, chimiste à la Manufacture impériale de Sèvres, précédé d'une Notice sur M. *Ébelmen*, par M. *Chevreul*, membre de l'Institut. 1re partie, **Chimie.** — 2e partie, **Céramique.** — 3e partie, **Géologie.** — 4e partie, **Métallurgie.** 2 forts vol. in-8, avec 54 gravures dans le texte. 1855. 15 fr.

FLANDIN (Ch.), docteur en Médecine de la Faculté de Paris. — **Traité des Poisons, ou Toxicologie appliquée à la Médecine légale, à la Physiologie et à la Thérapeutique.** 3 vol in-8, avec planches; 1853.. ..... 21 fr.
Les tomes II et III se vendent séparément..... 14 fr.

JULIEN (Stanislas), membre de l'Institut. — **Histoire et Fabrication de la Porcelaine chinoise**, ouvrage traduit du chinois; accompagné de Notes et Additions par M. *Alphonse Salvétat*, chimiste à la Manufacture impériale de Porcelaine de Sèvres; et augmenté d'un **Mémoire sur la Porcelaine du Japon**, traduit du japonais par M. le docteur *Hoffmann*. (*Dédiée à M. le Ministre de l'Instruction publique.*) Beau volume imprimé sur grand raisin fin glacé, avec figures gravées sur bois, 14 planches, et une carte de la Chine indiquant l'emplacement des manufactures de porcelaine anciennes et modernes. In-8; 1856. 12 fr.

LAURENT (Auguste), membre correspondant de l'Institut. — **Méthode de Chimie**, précédée d'un *Avis au Lecteur*, par M. *J.-B. Biot*, membre de l'Institut. In-8, avec figures dans le texte; 1854..... 8 fr.

MUNIN, ancien élève de l'Ecole Normale, ex-professeur de Chimie et de Physique au Lycée de Bourges. — **Chimie expérimentale et théorique, appliquée aux Arts industriels et agricoles.** 2 vol. in-8, avec 8 pl..... 10 fr.

PELOUZE et FREMY. — **Traité de Chimie générale**, comprenant les applications de cette science à l'Analyse chimique, à l'Industrie, à l'Agriculture et à l'Histoire naturelle. 6 vol. grand in-8, avec 2 vol. de planches.... 48 fr.

SALVÉTAT (A.), chef des Travaux chimiques à la Manufacture impériale de Sèvres. — **Leçons de Céramique** professées à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures, ou **Technologie céramique**, comprenant les Notions de Chimie, de Technologie et de Pyrotechnie, applicables à la Fabrication, à la Synthèse, à l'Analyse, à la Décoration des Poteries. 2 vol. in-18 avec figures dans le texte; 1857 ..... 12 fr.

PHYSIQUE.

BABINET, membre de l'Institut (Arademie des Sciences). — **Études et Lectures sur les Sciences d'observation et leurs applications pratiques.** In-12; Chaque volume se vend séparément ..... 2 fr. 50 c.

Le **1er volume** contient : *sur les Mouvements extraordinaires de la mer,— les Comètes au XIXe siècle. — la Télégraphie électrique,— l'Astronomie en 1852 et 1853, — Astronomie descriptive, — la Perspective aérienne, — le Stéréoscope et la vision binoculaire, — Voyage dans le ciel.*

Le **2e volume** contient : *les Tables tournantes et les manifestations prétendues surnaturelles, — l'Électricité ouvrière, — la Sibérie et les climats du Nord, — Influence des courants de la mer sur les climats, — sur les Tremblements de terre et sur la constitution intérieure du globe, — Bulletin de l'Astronomie et des Sciences pour 1853 et 1854, — de l'Arrosement du globe, — des Tables tournantes au point de vue de la Mécanique et de la Physiulogie, — la Météorologie en 1854 et ses progrès futurs.*

Le **3e volume** contient : *du Diamant et des Pierres précieuses, — des Phares et de la Lumière artificielle, — Physique du globe, — Quillebeuf, — la Méditerranée, — de la Pluralité des mondes.*

Le **4e volume** contient : *la Terre avant les époques géologiques, — de la Constitution intérieure du globe terrestre et des Tremblements de terre, — de la Pluie et des Inondations, — l'Astronomie en 1855, — les Saisons sur la terre et dans les autres planètes, — sur les Progrès récents de la Galvanoplastie, — de l'Application des Mathématiques transcendantes, — la Vie aux divers âges de la terre, — des Eaux minérales et de la Chaleur centrale de la terre.*

CHEVREUL (M.-E.), membre de l'Institut. — **De la Baguette divinatoire, du Pendule dit explorateur et des Tables tournantes, au point de vue de l'Histoire, de la Critique et de la Méthode expérimentale.** In-8..... 4 fr.

DU MONCEL (Th.). — **Exposé des applications de l'électricité.** 3 vol. in-8, avec planches; 1857 ..... 26 fr.

GANOT (A.), professeur de Mathématiques et de Physique. — **Traité élémentaire de Physique expérimentale et appliquée et de Météorologie.** 7e édit. in-12; 1857..... 7 fr.

GROVE (William R.), membre de la Société Royale de Londres. — **Corrélation des forces physiques**; traduit de l'anglais par l'abbé *Moigno*, et augmenté de Notes par M. *Seguin aîné*, correspondant de l'Institut. In 8; 1856. 7 fr. 50 c.

LAMÉ. — **Sur la Théorie mathématique de l'élasticité des Corps solides.** In-8, avec pl.; 1852..... 5 fr.

MATTEUCCI (Ch.), professeur de Physique à l'Université de Pise. — **Cours spécial sur l'Induction, le Magnétisme de rotation, le Diamagnétisme, et sur les relations entre la force magnétique et les actions moléculaires.** In-8, avec planches; 1854..... 5 fr.

PIERRE, professeur de Mathématiques. — **Exercices sur la Physique**, ou Recueil de Questions, de Problèmes et d'Éclaircissements sur différentes parties de cette science, avec les solutions. In-8, avec 4 planches..... 4 fr.

POISSON. — **Théorie mathématique de la Chaleur**, avec un Supplément ou Mémoire sur les températures du globe et de l'espace à différentes époques. 1835 et 1837. 2 vol. in 4..... 20 fr.
Le Supplément (1837) se vend *separément*... ..... 5 fr.

POUILLET. — **Éléments de Physique expérimentale et de Météorologie.** 7e édition; 2 vol. et atlas in-8; 1856..... 18 fr.

POUILLET et GAY-LUSSAC, membres de l'Institut. — **Instruction sur les Paratonnerres**, adoptée par l'Académie des Sciences. In-18, avec figures dans le texte et 2 planches; 1855..... 1 fr.

REECH (F.), ingénieur de la Marine. — **Théorie générale des effets dynamiques de la chaleur.** In-4, avec planches; 1854..... 10 fr.

SENARMONT (DE). — **Traité de Cristallographie**, traduit de l'anglais de *Miller*. In-8, avec 12 planches..... 5 fr.

TOPOGRAPHIE, GÉODÉSIE ET ARPENTAGE.

BRETON (de Champ), ingénieur des Ponts et Chaussées. — **Traité du Nivellement**, comprenant **la Théorie et la Pratique du Nivellement ordinaire et des Nivellements expéditifs** dits préparatoires ou de reconnaissance. In-8, avec pl.; 1848. (*Adopté par le Ministre de l'Instruction publique pour les Lycées*) 5 fr.

FRANCŒUR (**L.-B.**), membre de l'Institut. — **Traité de Géodésie**, augmenté de **Notes sur la Mesure des Bases**, par M. *Hossard*, professeur à l'Ecole Polytechnique. 3e édition, revue et corrigée par M. *Francœur fils*, professeur de Mathématiques à l'Ecole des Beaux-Arts. In-8, avec 11 pl.; 1855..... 10 fr.

GORIN. — **Traité de Géodésie pratique**, à l'usage des Arpenteurs. In-8; 1848..... 2 fr. 50 c.

GOULARD HENRIONNET, attaché à l'administration centrale des eaux et forêts. — **Guide du Géomètre pour les opérations d'Arpentage et le rapport des plans**, suivi d'un **Traité de Topographie et de Nivellement**. Ouvrage particulièrement utile aux agents forestiers chargés de ces opérations, aux Contrôleurs des contributions directes, aux Conducteurs des Ponts et Chaussées et aux Agents voyers, contenant toutes les méthodes pratiques propres à faciliter l'application sur le terrain et au cabinet, des principes théoriques constituant l'art de l'Arpenteur. In-8 avec 24 planches dont deux coloriées..... 12 fr.

LAUR. — **Traité de Géodésie pratique simplifiée.** 2 vol. in-8, 15 pl. 10 fr.

LEFÈVRE. — **Abrégé du nouveau Traité de l'Arpentage**, ou **Guide pratique et mémoratif de l'Arpenteur**, particulièrement destiné aux personnes qui n'ont point étudié la Géométrie; contenant toutes les méthodes nécessaires pour l'Arpentage, le Levé des plans, l'Aménagement des bois, le Nivellement, le Toisé; suivi d'un nouveau mode d'observer les angles d'une triangulation; etc. Gros vol. in-12, avec 18 pl., dont une coloriée..... 7 fr.

MARIE, professeur de Mathématiques et de Topographie. — **Principes du Dessin et du Lavis de la Carte topographique**, accompagnés de 9 modèles dont 8 sont coloriés avec soin. In-4 oblong..... 15 fr.

PAQUE (**A.**), élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur de Mathématiques à l'Athénée royal de Liége. — **Essai d'un Cours élémentaire de Topographie.** In-4, lith. de 195 pages; 1856..... 6 fr.

PUISSANT. — **Traité de Géodésie**, ou Exposition des méthodes trigonométriques et astronomiques, applicables, soit à la mesure de la terre, soit à la confection du canevas des cartes et des plans topographiques. 3e édition, corrigée et augmentée; 2 vol. in-4, avec pl.; 1842..... 40 fr.

REYNAUD et POMMIÉS. — **Manuel de l'Ingénieur du Cadastre.** In-4. 12 fr.

THOREL (**J.-B.-A**), géomètre de 1re classe du Cadastre. — **Arpentage et Géodésie pratiques.** Ouvrage à l'aide duquel on peut apprendre le Système métrique, l'Arpentage, la Division des terres, la Trigonométrie rectiligne, le Levé des Plans et la Gnomonique. 2e tirage; 1 vol. in-4, avec planches; 1853.... 4 fr.

DESSIN ET PRINCIPES D'ÉCRITURE.

BOUCHET (**Jules**), chef des travaux graphiques à l'École Centrale. — **Exercices de Dessin linéaire et de Lavis**, à l'usage des aspirants à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures. Recueil approuvé par le Conseil des études. In-folio oblong; 1855..... 6 fr.

CRESSON. — **Principes de Dessin; préparation à tous les genres.** Ouvrage destiné à toutes les maisons d'éducation en général et en particulier aux classes élémentaires des Lycées. In-4 oblong..... 1 fr. 60 c.

DELAISTRE (Louis), professeur de Dessin. — **Cours complet de Dessin linéaire, gradué et progressif**, contenant: **la Géométrie pratique, élémentaire et descriptive; l'Arpentage, la Levée des plans et le Nivellement; le Tracé des Cartes géographiques; les notions sur l'Architecture, le Dessin industriel; la Perspective linéaire et aérienne; le Tracé des Ombres et l'étude du Lavis.** Quatre Parties composées de 60 Planches et de 60 pages de texte in-4 oblong à deux colonnes, tirées sur jesus.

L'ouvrage complet, broché..... 15 fr.
— cartonné..... 16 fr. 50 c.

MM. les Professeurs et les Elèves pourront se procurer les planches *séparément* sans le texte. Prix de chaque planche..... 25 c.

FINANCE, maître à l'Ecole primaire de Saint-Dié. — **Principes de l'Écriture anglaise. Atlas in-4 oblong**..... 30 c.

GUIOT. — **Éléments de Perspective linéaire**, comprenant la théorie et les procédés pratiques de cette science. 2e édition, in-8, avec atlas in-folio oblong de 37 planches; 1847..... 10 fr.

LE BLANC, membre de la Légion d'honneur. — **Choix de Modèles appliqués à l'enseignement du Dessin des Machines**, avec un texte descriptif. In-4, avec atlas de 60 planches; 1840..... 22 fr.

LINA JAUNEZ. — **Cours élémentaire de Perspective.** 3e édit, ornée de 4 planches gravées sur acier, revue et corrigée par l'auteur avec la collaboration de M. *Théodore de Lamarre*, chevalier de l'ordre de Charles III d'Espagne. In folio; 1856..... 3 fr.

MARIE, professeur de Mathématiques et de Topographie. — **Principes des Écritures en caractères ordinaires et en caractères moulés**, appliqués aux Plans et aux Cartes et suivis de dix **Modèles** gravés avec soin. In-4 oblong 6 fr.

THIERRY fils, graveur, éditeur du *Vignole de poche*. — **Méthode graphique de Géométrie**, ou le **Dessin linéaire** appliqué aux arts en général, et en particulier à la Projection des Ombres, à la pratique de la Coupe des Pierres, à la Perspective linéaire et aux cinq ordres d'Architecture; ouvrage utile à tous les Artistes et Ouvriers employés à la construction et à la décoration des édifices; aux Maçons, Tailleurs de pierres, Marbriers, Charpentiers, Serruriers, Menuisiers, Peintres Décorateurs; 2e édition, revue et corrigée par M. *C.-F.-M. Marie*, professeur de Mathématiques. In-8 oblong, avec 50 pl.; 1846..... 8 fr. 50 c.

ARCHITECTURE, TRAVAUX PUBLICS, PONTS ET CHAUSSÉES, HYDRAULIQUE ET METALLURGIE.

BOILEAU (P.), professeur de Mécanique appliquée à l'École impériale d'application de l'Artillerie et du Génie. — **Traité de la Mesure des Eaux courantes.** In-4, avec 7 planches; 1854. Ouvrage couronné par l'Académie..... 20 fr.

BRESSE, ingénieur des Ponts et Chaussées, repétiteur de Mécanique aux Écoles Impériales Polytechnique et des Ponts et Chaussées. — **Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes.** In-4, avec pl.; 1854. 15 fr.

DARCY, inspecteur général des Ponts et Chaussées. — **Les fontaines publiques de la ville de Dijon**, exposition et application à suivre et formules à employer dans les questions de distribution d'eau; ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes, au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tôle et de bitume. In-4 avec atlas de 98 planches; 1856..... 38 fr.

DARCY, inspecteur général des Ponts et Chaussées. — **Recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux.** In-4 avec 12 grandes planches; 1857..... 20 fr.

DICTIONNAIRE DES ARTS ET MANUFACTURES, DE L'AGRICULTURE, DES MINES, etc., publié par M. *Ch. Laboulaye*, ancien élève de l'École Polytechnique. 2e édition, revue et augmentée; 4 vol. grand in 8, avec 3000 gravures dans le texte; 1854..... 60 fr.

DUFRÉNOY, ÉLIE DE BEAUMONT, LEON COSTE et PERDONNET, ingénieurs des Mines. — **Voyage métallurgique en Angleterre.** 2 forts vol. in-8, avec deux atlas ensemble de 39 gr. planches, compris deux cartes géologiques de l'Angleterre, coloriées..... 40 fr.

DURAND (J.-L.-N.), architecte, professeur d'architecture à l'École Polytechnique. — **Précis des Leçons d'Architecture données à l'École Polytechnique.** 2 vol. in-4 avec 52 planches..... 40 fr.

DURAND (J.-L.-N.). — **Partie graphique des Cours d'Architecture faits à l'École Polytechnique depuis sa réorganisation**, précédée d'un Sommaire des Leçons relatives à ce nouveau travail. In-4 avec 34 planches..... 20 fr.

ENDRÈS (E.), ancien élève de l'École Polytechnique, ingénieur des Ponts et Chaussées et de la Compagnie des Chemins de fer du Midi. — **Manuel du Conducteur des Ponts et Chaussées**, rédigé d'après le nouveau *Programme officiel*. Ouvrage indispensable aux Conducteurs et Agents secondaires des Ponts et Chaussées et des Compagnies de Chemins de fer, aux Agents voyers et à tous les Candidats à ces emplois. 2e édition, considérablement augmentée, et contenant toutes les matières du *Programme*. 2 vol. in-8, avec 487 figures dans le texte et 4 planches d'instruments dessinés et gravés d'après les meilleurs modèles. 1857..... 13 fr.

MIGNARD (B. R.). — **Guide des Constructeurs, ou Traité complet des Connaissances théoriques et pratiques relatives aux Constructions.** 2 vol. grand in-8, avec un atlas de 87 grandes planches..... 48 fr.

REGNAULT, professeur de Mathématiques. — **Cours de Mathématiques élémentaires théorique et pratique. — Manuel à l'usage des Candidats aux emplois de Conducteur des Ponts et Chaussées et l'Agent voyer, des Lycées et des Ecoles professionnelles**, rédigé d'après le *Programme officiel des études mathématiques*. In-8, avec planches; 1853. ..... 7 fr.

REGNAULT — Manuel des Aspirants au grade d'Ingénieur des Ponts et Chaussées. — Guide du Conducteur des Ponts et Chaussées, de l'Agent voyer, du Garde du Génie et de l'Artillerie, rédigé d'après le nouveau *Programme officiel*.

Ouvrage divisé en 2 Parties. — Chaque Partie se vend séparément:

PARTIE THÉORIQUE, contenant: l'Algèbre, la Géométrie analytique, la Géométrie descriptive, la Coupe des Pierres, la Charpente, la Physique, la Chimie, des Notions de Géologie, la Mécanique des corps solides et l'Hydraulique. 2 vol. in-8, avec 44 planches.... ..... 12 fr.

PARTIE PRATIQUE, contenant: les Cours de Routes, Cours de Chemins de fer, Cours de Ponts, la Navigation intérieure, des Notions sur les Desséchements et les Irrigations, les Ports maritimes; des Notions d'Architecture et l'exécution des travaux, etc. 2 vol. in-8, avec 50 planches... ..... 12 fr.

ROLLAND, Agent voyer d'arrondissement — **Méthode pratique pour l'établissement des Ponts et Ponceaux dans la confection des projets de routes et chemins.** In-4; 1856 ..... 3 fr. 50 c.

YVON VILLARCEAU, astronome à l'Observatoire Impérial de Paris. — **Sur l'Etablissement des Arches de pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité, et Tables pour faciliter les applications numériques.** In-4, avec figures dans le texte et 2 planches; 1854..... 12 fr.

MARINE.

BONNEFOUX, capitaine de vaisseau. — **Manœuvrier complet, ou Traité des Manœuvres de mer**, à bord des bâtiments à voiles ou à vapeur.... 7 fr.

CAILLET. — Traité élémentaire de Navigation, à l'usage des officiers de la Marine militaire et de la Marine du commerce. 2e édition. In-8 avec planches; 1850..... 9 fr.

D'ÉTROYAT (Ad.), constructeur. — **Traité élémentaire d'Architecture navale.** 1re partie, **Plan du navire.** — 2e partie, **Calculs.** — 3e partie, **Détails de construction.** In-4 et atlas in-folio de 29 planches..... 20 fr.

Se vendent séparément: 2e partie..... 5 fr.
3e partie..... 10 fr.

D'ÉTROYAT (Ad.). — De la Carène du Navire et de l'Échelle de solidité. In-4, avec 5 planches; 1856..... 4 fr.

D'ÉTROYAT (Ad.) — Embarcations des Navires de guerre et du commerce. Grand in-4 avec atlas in-folio de 15 planches; 1850..... 10 fr.

DUBREUIL. — Manuel du Matelottage et des Manœuvres, à l'usage des Élèves et des Candidats aux places de capitaine au long cours et au cabotage. In-8, avec planches, 4e édition; 1851.. ..... 7 fr. 50 c.

LAFAY. — Aide-Mémoire d'Artillerie navale, imprimé avec autorisation du Ministre de la Marine et des Colonies. In-8, avec pl..... 15 fr.

LESCALIER. — Traité du Gréement des vaisseaux. 2 vol. in-4..... 15 fr.

L'HUILLIER et PETIT. — Dictionnaire des Termes de Marine espagnols et français. In-8... ..... 5 fr.

MAZURE-DUHAMEL. — Construction et usages de quelques Tables particulières pour abréger les calculs d'Astronomie nautique, avec l'application aux problèmes les plus utiles de la navigation. In-4. 1825..... 3 fr. 50 c.

MONGE. — Description de la Fonte des Canons. In-4 ..... 10 fr.

MONTGÉRY. — Règle du Pointage à bord des Vaisseaux, ou Remarques sur ce qui est prescrit à cet égard dans les exercices de 1808 et 1811; suivies de Notes sur diverses branches de l'artillerie en général, et en particulier de l'artillerie de la marine, auxquelles on a ajouté 2 tableaux de pointage. In-8. Adopté pour l'enseignement à bord du vaisseau-école à Brest.. ..... 4 fr.

PARIS (E.), capitaine de vaisseau. — **Traité de l'Hélice propulsive**, publié sous les auspices de son Exc. M. *Ducos*, Ministre de la Marine et des Colonies. Grand in-8, avec planches; 1855..... 22 fr.

PARIS. — Catéchisme du Marin et du Mécanicien à vapeur. 2e édition. In-8; 185-.. ..... 16 fr.

PARIS et BONNEFOUX. — Dictionnaire de Marine à voiles et à vapeur. 2 vol. grand in 8..... 40 fr.

Chaque volume se vend séparément: Marine à voile..... 20 fr.
Marine à vapeur..... 25 fr.

POISSON. — **Mémoire sur les déviations de la Boussole produites par le fer des vaisseaux.** In-8..... 3 fr.
POTERAT. — **Théorie du navire.** 2 vol. in-4; 1826 ..... 30 fr.
QUARTIER DE RÉDUCTION ET ASTRONOMIQUE en usage dans la Marine. Collé sur carton..... 1 fr. 25 c.
Le même, en feuilles..... 50 c.
REECH. — **Machine à air d'un nouveau système déduit d'une comparaison raisonnée des systèmes de MM.** *Ericsson* et *Lemoine*. In-4, avec pl.; 1854. 6 fr.
ROMME. — **Dictionnaire de la Marine française.** Nouvelle édition à laquelle on a ajouté 157 pavillons, flammes et guidons. In-8, avec 7 planches coloriées avec soin; 1823..... 6 fr.

PUBLICATIONS DIVERSES.

AMPÈRE. — **Essai sur la Philosophie des Sciences ou Exposition analytique de classification naturelle de toutes les connaissances humaines, etc.** 2 vol. in-8; 1843-1856..... 10 fr.
Le 1er volume se vend séparément..... 5 fr.
CROS (H.). — **Théorie de l'homme intellectuel et moral.** 4e édition, augmentée de l'apologie en six discours adressés à l'Académie des Sciences morales et politiques. 2 vol. in 8; 1857 ..... 12 fr.
DUCHESNE (E.-A.), Docteur en Médecine, membre du Conseil d'Hygiène publique et de Salubrité. — **Des Chemins de Fer et de leur influence sur la Santé des Mécaniciens et des Chauffeurs.** In-12, 1857..... 3 fr. 50 c.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS, rédigées par M. *U.-J. Le Verrier*. Grand in-4 Tomes I et II..... 54 fr.
Chaque volume se vend separément..... 27 fr.
Il a été tiré un petit nombre d'exemplaires sur cavalier vélin double; le prix de chaque volume est..... 40 fr.
Le tome III est *sous presse*.
ATLAS DES ANNALES DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS., par M. *Chacornac*, astronome à l'Observatoire de Paris. **1re, 2e et 3e Livraisons,** comprenant **18 Cartes écliptiques**. .. .. 36 fr.
Chaque livraison composée de 6 cartes se vend separément..... 12 fr.
JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES ou **Recueil mensuel de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques,** publié par *J. Liouville*, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.
1re Série, 20 volumes in-4, années 1836 à 1855, au lieu de 600 francs, 400 francs, payables de la manière suivante : 100 fr. comptant, et les 300 fr restants en trois bons de 100 fr. de six mois en six mois à l'ordre de M. Mallet-Bachelier, à partir de l'époque de la livraison des 20 volumes.
Chaque volume pris séparément, au lieu de 30 fr..... 25 fr.
La 2e Série, commencée en 1856, continue de paraître chaque mois par cahier de 32 à 48 pages

Prix de l'abonnement, pour Paris. 30 fr.
Pour les Departements..... 35 fr.
Pour l'Etranger..... 45 fr.

JOURNAL DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'Instruction de cet établissement. 36e cahier .... 10 fr.
NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, Journal des Candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, redigé par M. *Terquem*, officier de l'Université, docteur ès Sciences, et M. *Gerono*, professeur de Mathématiques. 15 vol. in-8; 1842 à 1856 inclusivement.... ..... 105 fr.
Les tomes VIII à XIII se vendent séparément..... 8 fr.
Les tomes XIV et XV se vendent séparément..... 10 fr.
Les tomes VIII à XV, ensemble..... 60 fr.
En faisant *à la fois* la demande des tomes VIII à XV ils seront expédiés *franco*.
Le tome XVI, année 1857, paraît le 1er de chaque mois par livraisons de 3 à 4 feuilles.

Prix de l'abonnement, pour Paris. 12 fr.
Pour les Departements..... 14 fr.
Pour l'Etranger..... 16 fr.

TERQUEM, officier de l'Université, docteur ès sciences. — **Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques.** In-8, tome II; 1856. 3 fr. 50 c.
Les tomes I et II, ensemble..... 5 fr.

Paris.— Imprimerie de Mallet-Bachelier, rue du Jardinet, 12. (Août 1857.)

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

TRAITÉ DE STÉRÉOTOMIE,

COMPRENANT

LES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A

LA THÉORIE DES OMBRES, LA PERSPECTIVE LINÉAIRE, LA GNOMONIQUE, LA COUPE DES PIERRES ET LA CHARPENTE;

PAR C.-F.-A LEROY,

Ancien Professeur à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure, Chevalier de la Légion d'honneur.

2e édition, revue et annotée.

PAR M. E. MARTELET,

Ancien élève de l'École Polytechnique, ex-Officier d'Artillerie, Professeur de Géométrie descriptive à l'École centrale des Arts et Manufactures, ancien Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

In-4 avec Atlas de 74 planches in-folio; 1857. — Prix : 26 fr.

LEÇONS DE CÉRAMIQUE

PROFESSÉES

A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

OU

TECHNOLOGIE CÉRAMIQUE,

COMPRENANT

Les notions de Chimie, de Technologie et de Pyrotechnie, Applicables à la fabrication, à la synthèse, à l'analyse, à la décoration des poteries;

PAR M. A. SALVÉTAT,

Chef des Travaux chimiques à la Manufacture impériale de Sèvres, Chevalier de la Légion d'honneur.

2 volumes in-18 avec figures dans le texte; 1857... 12 francs.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE,

PAR J.-B. BIOT,

Membre de l'Académie des Sciences, de l'Académie française, du Bureau des Longitudes.

3e édition corrigée et augmentée.

5 forts volumes in-8° avec 94 planches. 65 fr.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

PROBLÈMES DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

Disposés pour servir d'application aux principes enseignés dans les cours;

PAR LE P. JULLIEN,
De la Compagnie de Jésus.

Cet ouvrage renferme les questions nouvellement introduites dans le Programme de la Licence et de nombreuses applications pratiques.

Deux volumes in-8 avec figures dans le texte. Prix.... 12 francs.

DE LA

MESURE DU TEMPS

ET DESCRIPTION DE LA

MÉRIDIENNE VERTICALE PORTATIVE,

DU TEMPS VRAI ET DU TEMPS MOYEN

POUR RÉGLER LES PENDULES ET LES MONTRES,

Admise à l'Exposition des produits de l'industrie française.

EXÉCUTÉ PAR E.-F. IMBART,
Professeur de Lavis et de Topographie à l'École militaire de Saint-Cyr.

2e édition, in-12 avec planche: 1857. — Prix: 1 fr.

MÉLANGE DE GÉOMÉTRIE PURE

COMPRENANT

Diverses applications des Théories exposées dans le Traité de Géométrie supérieure de M. Chasles, au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, aux Sections coniques, aux Courbes du troisième ordre, etc., et la traduction du TRAITÉ DE MACLAURIN sur les Courbes du troisième ordre;

PAR E. DE JONQUIÈRES,
Lieutenant de vaisseau.

In-8 avec 5 planches. 1856. — Prix..... 5 francs.

RECUEIL D'EXERCICES

SUR LE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR M. F. FRENET,
Ancien élève de l'École Normale, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Ouvrage destiné aux élèves de l'École Polytechnique, à ceux de l'École Normale, et aux auditeurs des Cours de Mathématiques dans les Facultés des Sciences.

Volume in-8 avec planches: 1856. — Prix: 5 fr.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

Digitized by Google

ÉLÉMENTS

D'ALGÈBRE.

Digitized by Google

L'**Auteur** et l'**Éditeur** de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet ouvrage a été fait à Paris dans le cours du mois de septembre 1857, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Mallet-Bachelier

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

608923

ÉLÉMENTS D'ALGÈBRE

A L'USAGE DES CANDIDATS

AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES ET AUX ÉCOLES SPÉCIALES,

PAR EUGÈNE ROUCHÉ,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, Professeur au Lycée Charlemagne.

Rédigés conformément aux Programmes de l'Enseignement scientifique des Lycées.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE

Quai des Augustins, 55.

1857

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

LIBRARY

Digitized by Google

PRÉFACE DE L'AUTEUR.

Cet ouvrage est le résumé de mes leçons au Lycée Charlemagne. Les dix-sept premiers chapitres forment un Cours complet à l'usage des élèves de la section scientifique, des aspirants au Baccalauréat et des candidats aux Écoles Navale et Militaire. Les quatre derniers s'adressent aux personnes qui désirent connaître tous les principes du calcul algébrique. Des questions variées terminent chaque théorie; en s'exerçant à les résoudre, les élèves studieux apprendront à calculer avec sûreté et promptitude.

Insister sur les méthodes générales, mettre les principes en évidence, séparer nettement les questions de nature différente, telle a été ma constante préoccupation. Ainsi, le premier degré a été divisé en quatre parties : principes pour la transformation des équations, procédés de résolution, discussion des formules générales, mise en équation et discussion des problèmes. Chaque règle est suivie d'un exemple qui en fixe le sens; la discussion des formules a été traitée au point de vue le plus général.

La discussion si importante des trinômes du second degré, le vrai caractère des maximums et des minimums exigent, ce me semble, pour être bien saisis, l'intervention des courbes; la représentation graphique aide singulièrement l'esprit dans l'étude des fonctions : en traçant, après chaque partie d'une discussion analytique, la branche de courbe

Digitized by Google

qui s'y rapporte et qui la résume, on va d'un pas sûr, sans s'égarer dans les détails, ni perdre de vue la marche générale de la fonction que rappelle sans cesse l'allure de la courbe. Aussi ai-je consacré quelques pages à cette représentation graphique et aux propriétés générales qui en découlent, telles que le principe de Fermat pour les maximums.

L'ouvrage se termine par des notions sur les combinaisons, les déterminants, le binôme, les exposants incommensurables, et par un chapitre sur les calculs numériques. J'ai réuni sous ce titre l'application de la méthode des approximations successives à la résolution de l'équation du second degré et aux calculs d'intérêt, et la résolution des équations linéaires à grands coefficients, d'abord par la méthode de substitution, puis par l'emploi des logarithmes de Gauss.

Des notions historiques éparses complètent cet essai, qui, malgré les excellents avis de quelques collègues et les bienveillants conseils de mes maîtres, n'est pas, sans doute, exempt d'imperfection. Désirant, avant tout, être utile aux élèves, je prie messieurs les Professeurs de me soumettre leurs critiques; j'accueillerai toutes les observations avec reconnaissance.

EUGÈNE ROUCHÉ.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE DE L'AUTEUR..... V

CHAPITRE I.

EMPLOI DES LETTRES COMME MOYEN D'ABRÉVIATION ET DE GÉNÉRALISATION.

Explication des signes. — Notions historiques..... 1
Emploi des signes comme moyen d'abréviation..... 2
Emploi des lettres comme moyen de généralisation..... 3
Définition de l'Algèbre. — Avantages des formules..... 4
Classification des formules..... 6
EXERCICES..... 7

CHAPITRE II.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

Caractère distinctif des opérations algébriques..... 9
Addition et soustraction des monômes..... 9
Principes d'addition des polynômes..... 9
Règle d'addition des polynômes..... 10
Règle de soustraction des polynômes..... 11
Réduction des termes semblables..... 11
Manière d'opérer dans la pratique..... 12
EXERCICES..... 13

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION.

Multiplication des monômes..... 14
Produit d'un polynôme par un monôme..... 15

Digitized by Google

Pages.
Polynômes ordonnés..... 16
Produit de deux polynômes..... 17
Nombre des termes du produit..... 20
Polynômes homogènes..... 21
Carré d'un polynôme..... 22
Cube d'un polynôme..... 23
Exercices..... 24

CHAPITRE IV.

NOMBRES NÉGATIFS.

Addition d'un polynôme quelconque..... 26
Soustraction d'un polynôme quelconque..... 27
Nombres négatifs..... 27
Multiplication de deux polynômes quelconques..... 29
Règles des signes pour la multiplication et la division..... 30
Exercices..... 31

CHAPITRE V.

DIVISION.

Division des monômes..... 33
Exposant zéro. Exposant négatif..... 33
Division des polynômes..... 35
Disposition de l'opération..... 36
Divisions impossibles..... 37
Division par $x - a$..... 39
Exercices..... 42

CHAPITRE VI.

PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS.

Équation. — Équations équivalentes..... 44
Transposition des termes..... 45
Expulsion des dénominateurs..... 46
Expulsion des radicaux..... 48
Combinaison des équations par addition et soustraction..... 49
Principe de l'élimination par substitution..... 50
Notions sur les inégalités..... 51
Exercices..... 52

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Pages.
Degré d'une équation..... 54
Résolution d'une équation à une inconnue..... 54
Équations qu'on ramène au premier degré..... 55
Système de deux équations à deux inconnues..... 57
Élimination par substitution..... 57
Élimination par réduction..... 58
Cas d'un nombre quelconque d'équations..... 60
Méthode des multiplicateurs..... 63
Procédés particuliers..... 64
Systèmes impossibles ou indéterminés..... 67
Exercices..... 70

CHAPITRE VIII.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ. — DISCUSSION.

Équation à une inconnue..... 72
Système de deux équations à deux inconnues..... 72
Système de trois équations à trois inconnues..... 74
Symbole $\frac{m}{0}$..... 76
Symbole $\frac{0}{0}$..... 77
Symboles $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$..... 80
Discussion générale des formules algébriques..... 82
Application au système $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$..... 84
Condition d'identité de deux polynômes..... 86
Vérification des formules algébriques..... 88
Méthode des coefficients indéterminés..... 88
Exercices..... 90

CHAPITRE IX.

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

Objet du chapitre..... 93
Mise en équation. — Exemples..... 94

Digitized by Google

Pages.
Inconnues auxiliaires 99
De l'infini comme solution 100
Problèmes indéterminés 101
Des solutions négatives 103
Introduction des nombres négatifs dans les données 107
Problème des courriers 110
Exercices 112

CHAPITRE X.

RADICAUX. — IMAGINAIRES.

Valeur arithmétique d'un radical 114
Principes fondamentaux 114
Réduction au même indice 115
Multiplication, division, puissances et racines 116
Simplification d'un radical 117
Vraie valeur des irrationnelles indéterminées 118
Exposants fractionnaires 120
Valeurs algébriques des radicaux 122
Expressions imaginaires 123
Opérations sur les imaginaires 124
Utilité des imaginaires 126
Exercices 128

CHAPITRE XI.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Forme des équations du second degré 129
Résolution générale. — Exemples 130
Cas de $a = 0$ 134
Relations entre les coefficients et les racines 134
Décomposition du trinôme $ax^2 + bx + c$ 136
Signes du trinôme $ax^2 + bx + c$ 139
Exercices 141

CHAPITRE XII.

ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ.

Equations bicarrées 143
Transformation de $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ 144

Digitized by Google

Pages.
Système de deux équations dont une du second degré..... 145
Artifices particuliers. — Exemples..... 146
Système de deux équations du second degré..... 148
Artifices particuliers. — Exemples..... 149
Quelques systèmes remarquables..... 150
Exercices..... 153

CHAPITRE XIII.

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

Question sur les proportions..... 155
Moyenne et extrême raison..... 156
Problème de Pappus..... 157
Cône circonscrit à la sphère..... 159
Sur le triangle rectangle..... 161
Sur les pompes..... 162
Problème du puits..... 164
Problème des lumières..... 166
Exercices..... 167

CHAPITRE XIV.

QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

Méthode générale..... 169
Cône circonscrit à la sphère..... 170
Alvéole des abeilles..... 171
Maximum de $(ax^2+bx+c):(a'x^2+b'x+c')$..... 173
Maximum d'un produit de facteurs dont la somme est constante..... 175
Maximum de $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$, $x+y+z+\ldots$ étant constant..... 176
Maximum et minimum réciproques..... 177
Applications géométriques diverses..... 178
Introduction de facteurs indéterminés..... 181
Problème de cartonnage..... 182
Exercices..... 183

CHAPITRE XV.

PROGRESSIONS.

Définition des progressions arithmétiques..... 186
Valeur d'un terme de rang quelconque..... 186

Digitized by Google

Pages.
Somme des termes 187
Insertion des moyens 188
Progressions géométriques 189
Valeur d'un terme de rang quelconque 190
Les puissances d'un nombre > 1 croissent indéfiniment 191
Somme des termes 191
Cas d'une progression indéfiniment décroissante 191
Insertion des moyens 192
Somme des carrés et des cubes des n premiers nombres 193
Piles de boulets 195
Exercices 197

CHAPITRE XVI.

LOGARITHMES

Définition des logarithmes 199
Logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance 201
Changement de système 203
Logarithmes vulgaires 205
Caractéristique 205
Caractéristiques négatives 207
Compléments arithmétiques 208
Disposition et usage des Tables de Callet 209
Intérêts composés 213
Annuités 215
Exercices 217

CHAPITRE XVII.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS.

Définition des fonctions. — Continuité 219
Représentation graphique des fonctions continues 221
Application du trinôme $ax^2 + bx + c$ 222
Méthode de Fermat pour les maximums 225
Applications analytiques 226
Applications géométriques 228
Propriété générale des fonctions continues 229
Homogénéité 230
Exercices 233

Digitized by Google

CHAPITRE XVIII.

COMBINAISONS. — DÉTERMINANTS.

Pages.
Diverses sortes de combinaisons 235
Arrangements 235
Permutations 236
Produits différents 237
Permutations avec répétition 238
Probabilités 238
Loi de formation des déterminants 240
Règle de Cramer 244
Multiplication des déterminants 245
Exercices 248

CHAPITRE XIX.

BINOME DE NEWTON.

Produit de binômes ayant même premier terme 250
Binôme de Newton 251
Triangle de Pascal. — Nombres figurés 253
Développement de $(a \pm bi)^m$ 256
Puissances des polynômes 256
Racines des polynômes 257
Exercices 260

CHAPITRE XX.

LOGARITHMES CONSIDÉRÉS COMME EXPOSANTS.

Variations de la fonction a^x 262
Exposants incommensurables 264
Nouvelle définition des logarithmes 266
Changement de base 268
Réciproque de la propriété fondamentale 268
Exercices 269

CHAPITRE XXI.

CALCULS NUMÉRIQUES.

Méthode des approximations successives 270

Digitized by Google

Pages.

Application à $ax^2 + bx + c = 0$, pour $\frac{ac}{b^2}$ très-petit 271

Application à un calcul d'intérêt 275

Résolution des équations linéaires à grands coefficients 277

Emploi des logarithmes de Gauss 278

Méthode des moindres carrés 280

Exercices 284

ÉLÉMENTS
D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

EMPLOI DES LETTRES COMME MOYEN D'ABRÉVIATION ET DE GÉNÉRALISATION.

EXPLICATION DES SIGNES.

1. En algèbre, on représente les nombres par des lettres, et l'on indique les opérations par des signes.

+, qu'on énonce *plus*, est le signe de l'addition.

—, placé entre deux nombres, signifie qu'il faut soustraire le second nombre du premier.

Les signes + et — se trouvent pour la première fois dans la *coss* de Christophe Rudolph (1524).

ab est l'indication du produit de a par b; cette notation est due au géomètre anglais Thomas Harriot (1631).

Le signe $\times$ et le point ., qu'on emploie pour les nombres, viennent, le premier, d'Oughtred (1631), le second, de Christian Wolf (1752).

On indique la division de a par b en écrivant $\frac{a}{b}$ ou $a : b$.

a^m signifie la $m^{ième}$ puissance de a, c'est-à-dire le produit de m facteurs égaux à a; et la lettre m, qui, placée au-dessus de a et en avant, exprime le *degré* de la puissance, porte le nom d'*exposant*. Cette notation, si répandue depuis Descartes (1596-1650), remonte à Estienne de la Roche (*Arismétique et Géométrie*, Lyon, 1520). Les Italiens se servaient des lettres q et c, initiales

des mots *quadrato*, *cubo*, et ils écrivaient

aq pour a^2, ac pour a^3, aqq pour a^4,
acq pour a^5, acc pour a^6, $acqq$ pour a^7, etc.

$\sqrt[m]{a}$ signifie la racine $m^{ième}$ de a; on appelle *indice* la lettre m qui exprime la puissance à laquelle il faut élever le radical pour reproduire le nombre a. En 1520, Estienne de la Roche se sert du signe $R)^m$, et, chose assez bizarre, il applique cette notation quel que soit l'indice m (*ainsi des aultres racines continuant sans fin*), tandis qu'il n'emploie que les exposants 1, 2, 3. La substitution de la minuscule r à la majuscule R a conduit un peu plus tard (1524) Christophe Rudolph au signe $\sqrt{a}^m$, que Descartes a remplacé finalement par $\sqrt[m]{a}$.

$=$ placé entre deux expressions indique que la première est égale à la seconde. Ce signe nous vient de l'Anglais Robert Recorde (1557).

$a > b$ signifie que a est plus grand que b. C'est Harriot qui le premier a fait usage de cette notation.

Quand une expression est placée entre parenthèses, on doit regarder comme effectuées les opérations indiquées dans cette parenthèse. Ainsi l'expression

$$25 - (3 + 4 - 2)$$

signifie qu'il faut retrancher de 25 le nombre 5 qui résulte des opérations indiquées dans les crochets. L'emploi des parenthèses remonte à Albert Girard (1629).

Le géomètre français Viète (1540) est le premier qui ait représenté les nombres par des lettres; seulement il employait les majuscules; l'introduction des petites lettres est due à Thomas Harriot.

EMPLOI DES SIGNES COMME MOYEN D'ABRÉVIATION.

2. Pour apprécier les avantages qu'offre l'emploi des signes dans la résolution des problèmes, proposons-nous la question suivante :

Trois nombres ont pour somme 238; *le second surpasse le premier de* 3 *unités, et le troisième est égal à la somme des deux autres; quels sont ces trois nombres?*

Le second nombre surpassant le premier de 3 unités, le troisième vaut 2 fois le premier, plus 3; et la somme 238 se compose de 4 fois le premier nombre, plus 6.

L'excès de 238 sur 6 est donc égal à 4 fois le premier nombre; en sorte qu'on obtient finalement $\frac{232}{4} = 58$ pour le premier nombre, $58 + 3 = 61$ pour le second, et $58 + 61 = 119$ pour le troisième.

Reprenons la question en indiquant les opérations par des signes, et en désignant le premier nombre par la lettre x.

Les trois nombres sont

$$x, \quad x + 3, \quad x + x + 3.$$

Leur somme est égale à 238, ce qu'on écrit

$$x + x + 3 + x + x + 3 = 238,$$

ou

$$4x + 6 = 238;$$

et, en retranchant 6 des deux côtés, puis prenant le quart,

$$4x = 238 - 6 = 232,$$

$$x = \frac{232}{4} = 58.$$

On voit combien l'emploi des signes et de la lettre x pour représenter l'inconnue facilite la solution. L'esprit, moins tendu, embrasse d'un coup d'œil toutes les opérations; il saisit nettement la marche à suivre, qu'on n'apercevait tout à l'heure qu'avec effort à travers de nombreuses périphrases.

EMPLOI DES LETTRES COMME MOYEN DE GÉNÉRALISATION.

3. La méthode précédente, malgré sa supériorité sur la première, laisse encore beaucoup à désirer. Elle ne fournit qu'un résultat numérique isolé dont rien ne révèle l'origine; et les opérations qu'on a faites sur les données pour arriver à la valeur de

l'inconnue n'ayant laissé aucune trace, il faut recommencer tout le raisonnement pour résoudre la même question sur d'autres nombres. Cette imperfection disparaît quand on désigne par des lettres non-seulement les inconnues, mais encore les données. On se sert des premières lettres de l'alphabet a, b, c, d, etc., pour représenter les données, et l'on réserve les dernières x, y, z, etc., pour désigner les inconnues.

4. Cherchons à *partager un nombre n en trois parties telles, que la seconde surpasse la première de a, et que la troisième soit égale à la somme des deux autres.*

La première partie étant... x
la seconde est..... $x + a$,
et la troisième..... $x + x + a$.

On écrit que la somme est égale à n,

$$x + x + a + x + x + a = n,$$
$$4x + 2a = n.$$

Puis, en retranchant $2a$ des deux côtés, et prenant le quart, on obtient successivement

$$4x = n - 2a,$$
$$x = \frac{n - 2a}{4};$$

d'où l'on voit que *la première partie est égale au quart de l'excès du nombre donné sur le double de la différence des deux premières parties.*

Une telle expression, qui indique la série des opérations à effectuer sur les données pour trouver la valeur de l'inconnue, porte le nom de *formule*. Une formule contient la solution de toute une classe de problèmes, c'est-à-dire de toutes les questions qui ne diffèrent que par les valeurs numériques des données.

5. On comprendra maintenant la définition de l'Algèbre élémentaire donnée par M. Poinsot dans les *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres.*

L'Algèbre élémentaire « n'est autre chose qu'une arithmétique » généralisée; c'est-à-dire étendue des nombres particuliers à des

» nombres quelconques, et par conséquent des opérations ac-
» tuelles qu'on exécutait à des opérations qu'on ne fait plus qu'in-
» diquer par des signes; de manière que dans cette première spé-
» culation de l'esprit on songe moins à établir le résultat de ces
» opérations successives qu'à en tracer le tableau, et à découvrir
» ainsi des formules pour la solution de tous les problèmes du
» même genre. »

6. Il n'est pas inutile de faire ressortir les avantages des formules.

On sait, par exemple, que l'on obtient l'intérêt i d'un capital a, placé au taux r pendant t années, en multipliant le capital par le taux, puis par le temps, et en divisant le résultat par 100; de là la formule

$$i = \frac{art}{100};$$

et si l'on remarque qu'on peut donner à cette expression les trois autres formes

$$a = \frac{100\,i}{rt}, \quad r = \frac{100\,i}{at}, \quad t = \frac{100\,i}{ar},$$

on voit que la même formule répond à quatre séries de problèmes qui, en arithmétique, avaient des solutions spéciales.

De même la formule

$$e = vt,$$

qui donne l'espace parcouru par un mobile qui se meut uniformément avec la vitesse v pendant le temps t, peut revêtir les deux nouvelles formes

$$v = \frac{e}{t}, \qquad t = \frac{e}{v}.$$

Elle comprend donc trois théorèmes. Galilée, qui, ne faisant pas usage de ces formules, démontrait directement chacune de ces propositions, a consacré quatre pages à ce sujet.

Ainsi l'inspection des formules fait naître des rapprochements entre des théorèmes dont la liaison passerait inaperçue, si l'on se contentait d'énoncer ces propositions en langage ordinaire.

CLASSIFICATION DES FORMULES.

7. Une expression est *rationnelle* quand elle ne renferme pas de radical; dans le cas contraire elle est *irrationnelle*. Les quantités irrationnelles portaient, chez les anciens géomètres, le nom de *nombres sourds* (*numeri surdi*).

Une expression rationnelle est *entière* lorsque aucune division n'y est indiquée; sinon elle est *fractionnaire*. On dit particulièrement qu'une expression algébrique est *entière par rapport à une lettre*, quand cette lettre n'entre dans aucun diviseur, ni sous aucun radical.

On appelle *monôme* toute expression qui ne contient l'indication d'aucune addition, ni d'aucune soustraction. Plusieurs monômes liés par les signes + ou — forment un *polynôme*, dont ils sont les *termes*. Un *binôme* est un polynôme à deux termes; un *trinôme* un polynôme à trois termes, etc.

Un monôme peut contenir à la fois des facteurs numériques et des lettres; le facteur numérique est dit *coefficient* : ainsi $\frac{5}{7}$ est le coefficient du monôme

$$\frac{5}{7}\,\frac{a^2b^3c}{\sqrt{d}}.$$

C'est Viète qui a introduit cette dénomination.

Deux monômes sont *semblables* lorsqu'ils ne diffèrent que par les coefficients.

On donne souvent le nom d'*expression entière* à toute expression algébrique qui n'est entière que par rapport aux lettres, et qui possède des coefficients fractionnaires.

8. *On obtient la valeur numérique d'un monôme en substituant aux lettres les nombres qu'elles représentent et effectuant les opérations indiquées.* Ainsi le monôme

$$\frac{3a^2c}{4b}$$

vaut $\frac{15}{4}$ pour $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$.

Digitized by Google

9. *La valeur numérique d'un polynôme est la différence entre la somme des valeurs numériques des termes qui sont précédés du signe + et la somme des valeurs numériques des termes qui sont précédés du signe —.*

D'où il suit que :

On ne change pas la valeur d'un polynôme en intervertissant l'ordre de ses termes.

10. Lorsque, pour les valeurs particulières attribuées aux lettres, la somme des termes précédés du signe — l'emporte sur la somme des termes précédés du signe +, la soustraction est impossible, et le polynôme n'a pas *de signification* pour ces valeurs particulières des lettres.

Ainsi le trinôme

$$a^2 - 3ab + b^2,$$

qui, pour $a = 12$ et $b = 1$, vaut 109, n'a pas de sens pour $a = 6$, $b = 4$, puisqu'on serait conduit à retrancher 72 de 52.

Nous supposerons jusqu'à nouvel ordre (IVe chapitre) que, dans les polynômes soumis à nos raisonnements, les valeurs attribuées aux lettres rendent la somme des termes *additifs* supérieure à celles des termes *soustractifs*.

EXERCICES.

I. Trouver deux nombres dont on connaît la somme s et la différence d.

II. Les deux aiguilles d'une montre sont l'une sur l'autre à midi ; indiquer toutes les époques auxquelles les deux aiguilles se trouveront l'une sur l'autre, ou dans le prolongement l'une de l'autre pendant les 12 heures suivantes.

III. Deux fabriques de bougie se font concurrence : l'une a été établie n jours après l'autre, et elle emploie a ouvriers qui travaillent h heures par jour, tandis que l'autre occupe a' ouvriers travaillant h' heures ; dans combien de temps les deux fabriques auront-elles fabriqué le même nombre de bougies ?

Digitized by Google

IV. Hiéron, roi de Syracuse, avait remis à un orfévre 10 livres d'or pour faire une couronne qu'il voulait offrir à Jupiter : le travail achevé, la couronne se trouva du poids de 10 livres. Mais le roi, soupçonnant que l'ouvrier avait allié de l'argent à l'or, consulta Archimède : celui-ci sachant que l'or et l'argent perdent dans l'eau, l'un les 52 millièmes de son poids et l'autre les 99 millièmes, pesa la couronne plongée dans l'eau, et trouva alors pour son poids 9 livres 6 onces; ce qui fit reconnaître la fraude. On demande combien il y avait de livres de chaque métal dans la couronne.

V. Un homme, chargé de transporter des vases de trois grandeurs, paye par vase cassé autant qu'il reçoit par vase rendu en bon état; on lui donne g grands vases, m moyens et p petits vases. On apprend qu'il a cassé tous les vases d'une certaine grandeur : s'il a cassé les grands ou les petits, il recevra a francs; s'il a cassé les moyens, il recevra b francs. On demande ce qu'il doit toucher pour chaque vase de chaque espèce rendu en bon état.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

ADDITION ET SOUSTRACTION DES MONOMES.

11. Deux expressions algébriques sont *équivalentes* quand la substitution des mêmes nombres aux lettres qu'elles renferment leur fait acquérir la même valeur numérique.

En algèbre on opère sur des lettres; le calcul ne peut donc être exécuté jusqu'au bout, et les opérations ont pour but de transformer les expressions algébriques qui résultent de leur indication immédiate en d'autres plus simples, mais équivalentes.

12. *Pour additionner plusieurs monômes, on les écrit les uns à la suite des autres en les séparant par le signe* $+$.

Il n'y a pas lieu de simplifier, puisque l'addition est la plus simple des opérations algébriques. Seulement *lorsque quelques-uns des monômes à ajouter sont semblables, on les réduit à un seul, auquel on donne un coefficient égal à la somme des coefficients des monômes réunis.* Ainsi, la formule

$$5a^4 + 3ab^2c + 4abc^2 + 6ab^2c$$

équivaut à

$$5a^4 + 9ab^2c + 4abc^2.$$

13. *Pour soustraire un monôme d'un autre, on écrit le second à la droite du premier en interposant le signe* $-$.

Si les deux monômes sont semblables, on les réduit à un seul, qui a pour coefficient la différence des coefficients des monômes réunis.

Exemple :

$$7a^2b - 4a^2b = 3a^2b.$$

PRINCIPES SUR LESQUELS REPOSE L'ADDITION DES POLYNOMES.

14. La théorie de l'addition des polynômes repose sur les principes suivants :

Digitized by Google

1°. *On ajoute une somme à un nombre en ajoutant successivement à ce nombre chacune des parties de la somme.*

Ce principe s'exprime par la formule

$$A + (a + b + c + d) = A + a + b + c + d,$$

où les diverses lettres peuvent représenter des nombres quelconques.

2°. *On retranche une somme d'un nombre en retranchant de ce nombre successivement les diverses parties de la somme.* Ainsi l'on a

$$A - (a + b + c + d) = A - a - b - c - d.$$

En effet, le second membre est bien tel, qu'en y ajoutant $a + b + c + d$, on retrouve le nombre primitif A.

3°. *Pour ajouter à un nombre la différence de deux autres, on ajoute le premier et l'on retranche le second du résultat.* Ainsi l'on a

$$A + (a - b) = A + a - b.$$

En effet, on a pour définition $a = b + (a - b)$; on en déduit en ajoutant A de part et d'autre, $A + a = A + b + (a - b)$, et puis en retranchant b des deux côtés $A + a - b = A + (a - b)$.

RÈGLE D'ADDITION DES POLYNOMES.

15. *Pour ajouter un polynôme à un nombre, il faut écrire à la suite de ce nombre les différents termes du polynôme avec leurs signes respectifs.*

En effet, soit proposé d'ajouter au nombre A le polynôme

$$a + b - c + d - e + f.$$

Ce polynôme équivaut (9) à

$$(a + b + d + f) - (c + e),$$

et le principe admis pour l'addition d'une différence (14,3°), donne

$$A + [(a + b + d + f) - (c + e)] = A + (a + b + d + f) - (c + e)$$

qu'on peut écrire, en vertu des règles prescrites (14, 1° et 2°) pour

l'addition et la soustraction d'une somme,

$$A + a + b + d + f - c - e,$$

ou, en changeant l'ordre des termes (9),

$$A + a + b - c + d - e + f,$$

résultat conforme à la règle énoncée.

RÈGLE DE SOUSTRACTION DES POLYNOMES.

16. *Pour soustraire un polynôme d'un nombre, on écrit à la suite du nombre les différents termes du polynôme en changeant les signes.*

Par exemple, la différence entre le nombre A et le polynôme

$$a + b - c + d - e + f$$

a pour expression

$$A - a - b + c - d + e - f.$$

En effet, la différence de deux quantités est, par définition, ce qu'il faut ajouter à la seconde pour obtenir la première. Or, en ajoutant l'expression précédente au polynôme proposé, on trouve (15)

$$a + b - c + d - e + f + A - a - b + c - d + e - f,$$

qui est bien égal à A.

RÉDUCTION DES TERMES SEMBLABLES.

17. Quand un polynôme renferme des termes semblables, on réduit ces termes à un seul, en opérant de la façon suivante :

On fait la somme des termes semblables précédés du signe +, celle des termes semblables précédés du signe — ; on retranche la plus petite de ces deux sommes de la plus grande ; et l'on substitue à l'ensemble des termes semblables, le reste affecté du signe de la plus grande somme.

Ainsi le polynôme

$$3a + 4b - 2a + 5c - 8b + 6b + 4a + 2c - 5b$$

devient, après réductions,

$$5a - 3b + 7c.$$

Digitized by Google

En effet, ce polynôme est, à l'ordre des termes près, le même que

$$3a + 4a - 2a + 4b + 6b - 8b - 5b + 5c + 2c,$$

qui, d'après les règles d'addition et de soustraction, équivaut successivement à

$$(3a + 4a) - 2a + (4b + 6b) - (8b + 5b) + (5c + 2c),$$
$$7a - 2a + 10b - 13b + 7c,$$
$$(7a - 2a) - (13b - 10b) + 7c,$$
$$5a - 3b + 7c.$$

MANIÈRE D'OPÉRER DANS LA PRATIQUE.

18. Lorsqu'on a à additionner des polynômes qui renferment des termes semblables, au lieu de suivre la règle du n° **15**, et de réduire après coup, on fait l'addition et la réduction en même temps; il suffit pour cela d'imiter la disposition adoptée en arithmétique pour additionner des nombres entiers. On écrit les polynômes proposés les uns au-dessous des autres par lignes horizontales, en rangeant les termes semblables par colonnes verticales; puis on réduit à un seul les termes de chaque colonne.

On procède de la même manière pour la soustraction, à cela près, qu'en écrivant le polynôme à soustraire on change les signes de ses termes.

EXEMPLE D'ADDITION.

$$\begin{array}{rrrr}
4a^3 & -\ 5a^2b & +\ 7ab^2 & -\ 9b^3 \\
-2a^3 & +\ 4a^2b & -\ 2ab^2 & -\ 4b^3 \\
6a^3 & -\ 10a^2b & +\ 8ab^2 & +\ 10b^3 \\
-3a^3 & -\ 8a^2b & +\ 5ab^2 & -\ 8b^3 \\
\hline
5a^3 & -\ 19a^2b & +\ 18ab^2 & -\ 11b^3
\end{array}$$

EXEMPLE DE SOUSTRACTION.

$$\begin{array}{rrrr}
15a^4 & +\ 18a^3b & +\ 17a^2b^2 & -\ 9b^4 \\
7a^4 & +\ 13a^3b & -\ 19a^2b^2 & +\ 6b^4
\end{array}$$

on écrit

$$\begin{array}{rrrr}
15a^4 & +\ 18a^3b & +\ 17a^2b^2 & -\ 9b^4 \\
-\ 7a^4 & -\ 13a^3b & +\ 19a^2b^2 & -\ 6b^4 \\
\hline
8a^4 & +\ 5a^3b & +\ 36a^2b^2 & -\ 15b^4
\end{array}$$

EXERCICES.

I. Un voyageur a parcouru 11 lieues le jour de son départ; mais le lendemain et les jours suivants sa marche s'est ralentie, de telle façon que, si, à partir du second jour de son voyage, on compare le trajet qu'il a fait chaque jour à celui de la veille, on trouve successivement pour rapport les fractions

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \frac{7}{9}, \ldots;$$

on demande le nombre des lieues parcourues par cet homme dans 30 jours.

II. On a deux alliages homogènes, mais différents l'un de l'autre. On remplace le tiers du premier par un poids égal du second, et inversement on remplace ce qui a été pris au second par ce qu'on a retiré du premier. L'échange fait, le rapport des deux métaux est le même dans les deux alliages; quel est le rapport du poids de ces alliages?

III. Deux vases de capacité v et v' sont pleins, l'un de vin, l'autre d'eau; on remplit à la fois, dans ces deux vases, deux nouveaux vases de même capacité u, puis on verse dans v ce qui a été pris dans v', et inversement. Trouver la composition des deux mélanges après 1, 2, 3, ..., n opérations.

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION.

MULTIPLICATION DES MONOMES.

19. La multiplication des monômes entiers repose sur les trois principes suivants, démontrés en arithmétique :

1°. *On multiplie un nombre par un produit en multipliant ce nombre successivement par les divers facteurs de ce produit ;*

2°. *Dans un produit on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué ;*

3°. *Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre est égal à la puissance de ce nombre marquée par la somme des exposants.*

Ce dernier principe s'exprime par la formule

$$a^m . a^n . a^p = a^{m+n+p},$$

où m, n, p sont des nombres entiers quelconques. Nous allons reprendre, en quelques mots, la démonstration. Dans le produit $a^m . a^n . a^p$ on peut remplacer a^m par m facteurs égaux à a, a^n par n facteurs égaux à a, a^p par p facteurs égaux à a (1°); le produit que nous considérons sera formé alors de $m + n + p$ facteurs égaux à a; il sera donc égal à a^{m+n+p}.

20. *Pour multiplier plusieurs monômes entiers, on multiplie les coefficients entre eux, on donne à chaque lettre commune à plusieurs facteurs un exposant égal à la somme de ceux qu'elle a dans chacun de ces facteurs, et l'on prend les autres lettres avec leurs exposants.*

En effet, le premier principe transforme la formule initiale

$$5 a^3 bc^2 d^3 \times 8 a^4 b^2 d \times 3 c^6 d^2 f$$

en la suivante :

$$5 a^3 bc^2 d^3 . 8 . a^4 . b^2 . d . 3 . c^6 . d^2 . f^1,$$

qui, en vertu du second principe, peut être écrite

$$(5.8.3)(a^3.a^4)(b.b^2)(c^2.c^6)(d^3.d.d^2).f^4,$$

ou enfin, d'après la troisième règle,

$$120\,a^7\,b^3\,c^8\,d^6\,f^4.$$

21. Il résulte des propositions démontrées en arithmétique (*) sur les rapports : 1° *que pour avoir le produit de plusieurs expressions algébriques fractionnaires, il suffit de les multiplier terme à terme ; 2° qu'on n'altère pas la valeur d'une expression algébrique fractionnaire en multipliant ou divisant ses deux termes par une même quantité.*

Le premier théorème ramène la multiplication des monômes fractionnaires à celle des monômes entiers. Le second permet de simplifier le résultat en supprimant les facteurs communs aux deux termes.

Exemple :

$$\frac{3\,a^3\,d}{2\,b^5}\times\frac{b^6\,c}{6\,a^5\,c^3\,d}=\frac{3\,a^3\,db^6\,c}{12\,b^5\,a^5\,c^3\,d}=\frac{b^3}{4\,a^2\,c^6}.$$

PRODUIT D'UN POLYNOME PAR UN MONOME.

22. Proposons-nous de multiplier un polynôme $a-b+c$ par un nombre quelconque m.

Si m est entier, l'opération revient à une addition de m polynômes égaux à $a-b+c$; le résultat se compose donc de chaque terme répété m fois et pris avec son signe, c'est-à-dire que l'on a

$$(a-b+c)\,m=am-bm+cm.$$

Si m est fractionnaire et de la forme $\frac{1}{q}$, q étant entier, nous remarquerons qu'on a, d'après ce qui précède,

$$a-b+c=\left(\frac{a}{q}-\frac{b}{q}+\frac{c}{q}\right)q\,;$$

d'où, en multipliant par $\frac{1}{q}$ de part et d'autre,

$$(a-b+c)\times\frac{1}{q}=\frac{a}{q}-\frac{b}{q}+\frac{c}{q},$$

(*) Serret, *Éléments d'Arithmétique*, chapitre XV.

et puis, en remplaçant $\frac{1}{q}$ par m,

$$(a - b + c)\, m = am - bm + cm.$$

Enfin, si m est fractionnaire et de la forme $\frac{p}{q}$, le produit est égal à p fois la $q^{ième}$ partie du multiplicande; et il suffira d'appliquer successivement les deux règles précédentes. En divisant d'abord le multiplicande par q, on a

$$\frac{a}{q} - \frac{b}{q} + \frac{c}{q},$$

puis, en multipliant ce résultat par p,

$$\frac{ap}{q} - \frac{bp}{q} + \frac{cp}{q},$$

ou, en remplaçant $\frac{p}{q}$ par m,

$$am - bm + cm.$$

Ainsi, dans tous les cas, *pour multiplier un polynôme par un monôme, il faut multiplier par ce monôme les divers termes du polynôme, et écrire les produits partiels les uns à la suite des autres, en conservant à chacun d'eux le signe de son facteur multiplicande.*

23. Il résulte de là que pour multiplier inversement un monôme par un polynôme, on multiplie le monôme successivement par les différents termes du polynôme, en conservant à chacun des produits partiels le signe de son facteur multiplicateur.

On a, en effet,

$$m\,(a-b+c) = (a-b+c)\,m = am-bm+cm = ma-mb+mc.$$

24. On dit qu'un polynôme est ordonné par rapport à une lettre, quand ses termes sont rangés de façon que, du premier au dernier, les exposants de cette lettre aillent toujours en croissant ou en diminuant. Lorsque la lettre ordonnatrice entre dans plusieurs termes avec le même exposant, on réunit ces divers termes en un seul en appliquant la règle du n° **22**.

Ainsi le polynôme

$$5\,bc\,x^4 + 2\,bx^5 - 6\,c^2 a x^3 + 4\,ax^5 + n^6 - 4\,a^2 bc^3$$

devient, après qu'on l'a ordonné par rapport à x,

$$(4\,a + 2\,b)\,x^5 + 5\,bcx^4 - 6\,nc^2 x^3 + n^6 - 4\,a^2 bc^3,$$

et l'on dit qu'il est du cinquième degré en x.

On l'écrit encore

$$\begin{array}{r|l} 4\,a & x^5 + 5\,bcx^4 - 6\,ac^2 x^3 + a^6 \\ +\,2\,b & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 4\,a^2 bc^3. \end{array}$$

Il est alors *ordonné en colonnes*.

PRODUIT DE DEUX POLYNOMES.

23. Soit à multiplier le polynôme

$$a + b - c + d - e$$

par le polynôme

$$m - n + p.$$

En appliquant la règle du n° 23 à la formule initiale

$$(a + b - c + d - e)\,(m - n + p),$$

on obtient l'expression

$$(a+b-c+d-e)\,m - (a+b-c+d-e)\,n + (n+b-c+d-e)\,p,$$

que la règle du n° 22 transforme en

$$\begin{aligned}(am + bm - cm + dm - em) &- (an + bn - cn + dn - en) \\ &+ (ap + bp - cp + dp - ep).\end{aligned}$$

On voit d'abord que *cette formule contient tous les produits partiels formés en multipliant successivement tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur.*

Pour découvrir la loi des signes, observons : 1° que dans les parenthèses chaque produit partiel a le signe de son facteur multiplicande ; 2° que chaque parenthèse est précédée du signe de son facteur multiplicateur. Un produit partiel quelconque a donc finalement le signe de son facteur multiplicande, ou le signe opposé, suivant que son facteur multiplicateur est affecté du signe

+ ou du signe —. De là le tableau

MULTIPLICANDE.	MULTIPLICATEUR.	PRODUIT.
$\pm$	$+$	$\pm$
$\pm$	$-$	$\mp$

qu'on peut résumer ainsi : *Chaque produit partiel est précédé du signe + ou du signe —, suivant qu'il provient de deux termes affectés du même signe, ou de deux termes affectés de signes contraires.*

Donc enfin :

Pour multiplier deux polynômes l'un par l'autre, on multiplie successivement les termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, en affectant du signe + les produits partiels formés par deux facteurs de même signe, et donnant le signe — aux produits partiels qui proviennent de deux facteurs de signes contraires.

26. Voici la manière de disposer l'opération.

Après avoir ordonné les deux polynômes par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes d'une même lettre x, on multiplie tous les termes du multiplicande, d'abord par le premier terme $4x^2$ du multiplicateur, puis par le second terme ax par le troisième $-3x$, etc., en plaçant dans une même colonne tous les produits partiels qui contiennent la même puissance de x. On fait ensuite la réduction dans chaque colonne verticale, et le produit se trouve ainsi ordonné par rapport à la lettre principale x, suivant laquelle on avait ordonné les deux facteurs.

EXEMPLE :

Multiplicande	$2x^3 + a$ $+ 2$	$x^2 - a^2$ $- 3a$ $+ 5$	$x + 5a^3$ $- 8a^2$ $+ 9a$ $- 5$
Multiplicateur	$4x^2 + a$ $- 3$	$x + 2a^2$ $+ 3a$ $- 9$	

Produit partiel par $4x^2$.	8	$x^5 + 4a$ $+ 8$	$x^4 - 4a^2$ $- 12a$ $+ 20$	$x^3 + 20a^3$ $- 32a^2$ $+ 36a$ $- 20$	x^3	
Produit partiel par ax.		$+ 2a$	$+ a^2$ $+ 2a$	$- a^3$ $- 3a^2$ $+ 5a$	$+ 5a^4$ $- 8a^3$ $+ 9a^2$ $- 5a$	x
Produit partiel par $-3x$.		$- 6$	$- 3a$ $- 6$	$+ 3a^2$ $+ 9a$ $- 15$	$- 15a^3$ $+ 24a^2$ $- 27a$ $+ 15$	
Produit partiel par $2a^2$.			$+ 4a^2$	$+ 2a^3$ $+ 4a^2$	$- 2a^4$ $- 6a^3$ $+ 10a^2$	$+ 10a^2$ $- 16a^4$ $+ 18a^3$ $- 10a^2$
Produit partiel par $3a$.			$+ 6a$	$+ 3a^2$ $+ 6a$	$- 3a^3$ $- 9a^2$ $+ 15a$	$+ 15a^4$ $- 24a^3$ $+ 27a^2$ $- 15a$
Produit partiel par -9.			$- 18$	$- 9a$ $+ 18$	$- 9a^3$ $- 27a$ $- 45$	$- 45a^3$ $+ 72a^2$ $- 81a$ $+ 45$
Produit total simplifié.	8	$x^5 + 6a$ $- 2$	$x^4 + a^2$ $- 7a$ $- 4$	$x^3 + 21a^3$ $- 28a^2$ $+ 47a$ $- 17$	$x^3 + 3a^4$ $- 32a^3$ $+ 25a^2$ $- 44a$ $- 30$	$x + 10a^2$ $- a^3$ $- 51a^2$ $+ 89a^2$ $- 96a$ $+ 45$

Digitized by Google

NOMBRE DES TERMES DU PRODUIT. — POLYNOMES HOMOGÈNES.

27. Théorème. — *Quand deux polynômes*

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F,$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

sont ordonnés par rapport aux puissances (ici décroissantes) *d'une même lettre x, le premier terme de leur produit, ordonné de la même façon, provient sans réduction de la multiplication des premiers termes des deux facteurs.*

En effet, dans un produit partiel quelconque, tel que

$$Bx^4 . cx^2 = Bcx^{4+2} = Bcx^6,$$

l'exposant de la lettre ordonnatrice est la somme des exposants que cette lettre possède à la fois dans le terme du multiplicande et dans le terme du multiplicateur qui ont fourni ce produit.

Le produit des deux premiers termes sera donc irréductible, puisque dans ce produit l'exposant de x, étant la somme des deux plus forts exposants, sera plus grand que dans tout autre produit partiel.

On démontrerait de la même manière que *le dernier terme du produit provient sans réduction de la multiplication des derniers termes des deux facteurs.*

D'où il suit que *le produit de deux polynômes ou d'un polynôme par un monôme a au moins deux termes.*

28. Quand les polynômes contiennent plusieurs lettres, le théorème précédent fait souvent connaître plus de deux termes irréductibles du produit.

Ainsi, en ordonnant par rapport à x les polynômes

$$x^5 - 2yx^4 + 4y^3x + y^2,$$
$$x^4 + 3y^4x + y^5,$$

on trouve les deux termes irréductibles

$$x^9 \quad \text{et} \quad y^7.$$

Si l'on ordonne, au contraire, les deux polynômes par rapport à

y, les termes irréductibles du produit sont

$$x^9 \quad \text{et} \quad 4xy^8.$$

Le produit aura donc au moins trois termes

$$x^9,\ y^7,\ 4xy^8.$$

Comme exemple d'un produit qui se réduit à deux termes, nous citerons

$$(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1})=x^m-a^m.$$

29. Nous n'avons parlé jusqu'ici que du degré par rapport à une lettre; on considère souvent le degré total.

Le degré d'un monôme entier est la somme des exposants des lettres qui entrent dans ce monôme; et le degré d'un polynôme entier est le plus haut degré des termes qui le composent.

Un polynôme est homogène quand tous ses termes ont le même degré; ainsi le polynôme

$$x^4+ax^3+2a^2x^2+4a^3x+a^4$$

est homogène et du degré 4.

Théorème. — *Le produit de deux polynômes homogènes est un polynôme homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des deux facteurs.*

En effet, tous les produits partiels doivent avoir même degré, puisque le degré de chacun d'eux est la somme des degrés d'un terme du multiplicande et d'un terme du multiplicateur, et que chacun de ces facteurs a tous ses termes de même degré.

PRODUIT DE PLUSIEURS POLYNOMES.

30. On obtient le produit de plusieurs polynômes en multipliant le premier par le second, le résultat par le troisième, et ainsi de suite.

31. *Le carré d'un polynôme est égal à la somme des carrés de ses différents termes augmentée de leurs doubles produits.*

La formule connue

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

montre que le théorème est vrai pour un binôme.

Pour un trinôme, on a

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2,$$
$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+c^2+2(a+b)c$$
$$=a^2+b^2+2ab+c^2+2ac+2bc,$$

ou

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

qui est encore conforme à l'énoncé.

Pour prouver la généralité de cette loi, il faut montrer que, si elle s'applique à un polynôme de n termes, elle subsiste pour un polynôme de $n+1$ termes.

Soient donc

$$a+b+c+\ldots+h+k$$

un polynôme de n termes, et

$$a+b+c+\ldots+h+k+l$$

un polynôme de $n+1$ termes. On a

$$(a+b+c+\ldots+h+k+l)^2=[(a+b+c+\ldots+h+k)+l]^2$$
$$=(a+b+c+\ldots+h+k)^2+l^2+2(a+b+c+\ldots+h+k)l.$$

Or le carré $(a+b+c+\ldots+h+k)^2$ contient par hypothèse les carrés de $a, b, c, \ldots, h, k$, et tous leurs doubles produits. Si donc on lui ajoute le carré de l et les doubles produits de $a, b, c, \ldots, h, k$ par l, on aura bien les carrés de tous les termes de $a+b+c+\ldots+h+k+l$, ainsi que tous leurs doubles produits.

Donc, si la loi s'applique à un polynôme de n termes, elle subsiste pour un polynôme de $n+1$ termes; et comme nous l'avons vérifiée pour un binôme et un trinôme, nous pouvons conclure qu'elle est encore vraie pour un polynôme de quatre termes; par suite elle s'applique à un polynôme de cinq termes, etc.

On écrit souvent le théorème précédent sous la forme symbolique

$$(a+b+c+\ldots+l)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab,$$

le signe Σ indiquant qu'il faut faire la somme de tous les termes semblables à celui que ce signe affecte.

32. *Le cube d'un polynôme se compose des cubes de ses diffé-*

rents termes, de trois fois les produits obtenus en multipliant un terme par le carré d'un autre, et de six fois les produits de trois termes. Il est représenté par la formule symbolique

$$(a+b+c+\ldots+l)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma ab^2 + 6\Sigma abc,$$

On vérifie aisément ce théorème pour un binôme et un trinôme. Ainsi l'on a

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2 - (a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\ (a+b+c)^3 &= (a+b+c)^3(a+b+c)\\ &= (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)(a+b+c)\\ &= a^3+b^3+c^3+3ab^2+3ac^2+3bc^3+3ba^2\\ &\quad +3ca^3+3cb^2+6abc.\end{aligned}$$

Il ne reste plus alors qu'à démontrer que si la loi s'applique à un polynôme de n termes, elle subsiste pour un polynôme de $n+1$ termes. Or on a

$$\begin{aligned}(a+b+c+\ldots+h+k+l)^3 &= [(a+b+c+\ldots+h+k)+l]^3\\ &= (a+b+c+\ldots+h+k)^3+l^3+3(a+b+c+\ldots+h+k)^2l\\ &\quad +3(a+b+c+\ldots+h+k)l^2.\end{aligned}$$

Le second membre contient évidemment tous les cubes $a^3,\ldots,l^3$. Il renferme, en outre, tous les triples produits de la forme $3\alpha^2\beta$; car soit un quelconque de ces triples produits : s'il ne contient pas l, il est par hypothèse renfermé dans

$$(a+b+c+\ldots+h+k)^3;$$

s'il contient l à la première puissance, il se trouve dans

$$3(a+b+c+\ldots+h+k)^2l,$$

et s'il renferme l au carré, il est contenu dans

$$3(a+b+c+\ldots+k)l^2.$$

On voit de même que les deux parties

$$(a+b+c+\ldots+h+k)^3, \quad 3(a+b+c+\ldots+h+k)^2l$$

contiennent 6 fois tous les produits des trois termes.

EXERCICES.

I. Vérifier les égalités

$$(aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2),$$

$$(ab' - ba')(ab'' - ba'') + (bc' - cb')(bc'' - cb'')$$
$$+ (ca' - ac')(ca'' - ac'') = (a^2 + b^2 + c^2)(a'a'' + b'b'' + c'c'')$$
$$- (aa' + bb' + cc')(aa'' + bb'' + cc'');$$

$$a + b + c + d = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$+ \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)};$$

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{a^3 b^3}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}$$
$$+ \frac{a^3 c^3}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}$$
$$+ \frac{a^3 d^3}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}$$

etc.

$$abc + abd + acd + bcd = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)}$$
$$+ \frac{a^2 b^2 d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)}$$
$$+ \frac{a^2 c^2 d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)}$$
$$+ \frac{b^2 c^2 d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)};$$

24. $a_1 a_2 a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3 - (a_1 + a_3 - a_2)^3$
$- (a_2 + a_3 - a_1)^3;$

192. $a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 - (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)^4$
$- (a_1 + a_2 + a_4 - a_3)^4 - (a_1 + a_3 + a_4 - a_2)^4$
$- (a_2 + a_3 + a_4 - a_1)^4 - (a_2 + a_3 - a_4 - a_1)^4$
$+ (a_2 + a_4 - a_3 - a_1)^4 - (a_3 + a_4 - a_2 - a_1)^4.$

II. Soient V le volume d'un tétraèdre; a, b, c, les arêtes qui

partent d'un même sommet; a', b', c', les cotés opposés : on a

$$\begin{aligned}144\,V^2 = {} & a^2 a'^2 (b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2) \\ & + b^2 b'^2 (a^2 + a'^2 + c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2) \\ & + c^2 c'^2 (a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2) \\ & - a'^2 b'^2 c'^2 - a^2 b^2 c'^2 - a^2 b'^2 c^2 - a'^2 b^2 c^2.\end{aligned}$$

III. Les égalités (relations d'involution)

$$aa' = bb' = cc'$$

entraînent

$$\frac{(a-b)(a-b')}{(a'-b)(a'-b')} = \frac{(a-c)(a-c')}{(a'-c)(a'-c')},$$

$$\frac{(b-c)(b-c')}{(b'-c)(b'-c')} = \frac{(b-a)(b-a')}{(b'-a)(b'-a')},$$

$$\frac{(c-a)(c-a')}{(c'-a)(c'-a')} = \frac{(c-b)(c-b')}{(c'-b)(c'-b')};$$

$$(a-b')(b-c)(c'-a') = (b-a')(a-c)(c'-b'),$$

$$(b-c')(c-a)(a'-b') = (c-b')(b-a)(a'-c'),$$

$$(c-a')(a-b)(b'-c') = (a-c')(c-b)(b'-a'),$$

$$(a-b')(b-c')(c-a') = (a-c')(b-a')(c-b');$$

montrer inversement que chacune des sept relations qui précèdent rentre dans la relation unique

$$(a+a')(bb'-cc') + (b+b')(cc'-aa') + (c+c')(aa'-bb') = 0.$$

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

GÉNÉRALISATION DES RÈGLES PRÉCÉDENTES. NOMBRES NÉGATIFS.

ADDITION D'UN POLYNOME QUELCONQUE.

33. Soit

$$a + b - c + d - e + f$$

un polynôme quelconque.

On sait que, lorsque la somme des termes précédés du signe + l'emporte sur la somme des termes précédés du signe —, l'addition du polynôme à un nombre quelconque A s'exprime par la formule

$$(1)\quad A + (a + b - c + d - e + f) = A + a + b - c + d - e + f.$$

Quand les valeurs attribuées aux lettres rendent la somme des termes additifs inférieure à celle des termes soustractifs, l'expression

$$a + b - c + d - e + f$$

perd toute signification relative à la mesure des grandeurs, et l'on ne sait plus quel sens il faut attacher à son addition. Cependant, la règle qui doit présider à cette combinaison, *purement abstraite*, loin d'être arbitraire, est imposée; l'addition du polynôme

$$a + b - c + d - e + f$$

doit encore se faire conformément à la formule (1). Cela résulte de l'esprit de généralisation qui constitue l'algèbre, science dont le caractère distinctif est d'étudier les opérations indépendamment des nombres sur lesquels elles s'exécutent.

Dans les calculs algébriques les valeurs numériques des lettres n'étant pas fixées d'avance, on ignore, lorsqu'on a à ajouter un polynôme, si la mise en nombre rendra ultérieurement la somme des termes additifs plus grande ou plus petite que la somme des termes soustractifs; si donc à chacun de ces deux cas corres-

pondait une règle particulière d'addition, l'impossibilité de décider dans quel cas on se trouve exigerait qu'on fît deux calculs parallèles ; chacun de ces calculs en engendrerait bientôt d'autres, qui eux-mêmes en produiraient de nouveaux ; et, sans parler des graves inconvénients qu'entraînerait la multiplicité des formules finales, on voit qu'en général on serait bien vite arrêté par ces nombreuses subdivisions : il n'y a donc de calcul algébrique possible qu'autant que la règle (1) est applicable à tous les cas.

Ainsi, *pour ajouter un polynôme à un nombre, il faut* TOUJOURS *écrire à la suite du nombre les différents termes du polynôme avec leurs signes.*

SOUSTRACTION D'UN POLYNOME QUELCONQUE.

34. Si l'on entend par soustraction l'opération qui a pour but de trouver une expression qui ajoutée *algébriquement* (33) à une expression donnée reproduise une autre expression aussi donnée, on voit que

Pour soustraire un polynôme d'un nombre, il faut TOUJOURS *écrire à la suite du nombre les différents termes du polynôme en changeant leurs signes.*

Ainsi la différence entre le nombre A et le polynôme

$$a + b - c + d - e + f$$

est

$$A - a - b + c - d + e - f;$$

car, en ajoutant cette expression au polynôme proposé, on trouve

$$a + b - c + d - e + f + A - a - b + c - d + e - f,$$

qui est bien égal à A.

NOMBRES NÉGATIFS.

35. Les formules générales

$$A + (a + b - c + d - e + f) = A + a + b - c + d - e + f,$$
$$A - (a + b - c + d - e + f) = A - a - b + c - d + e - f,$$

deviennent, dans le cas de $a = b = d = e = f = 0$,

(1) $$A + (-c) = A - c,$$

(2) $$A - (-c) = A + c,$$

et elles expriment alors les règles d'addition et de soustraction d'un nombre isolé précédé du signe —. Un tel nombre $(-c)$ est dit *négatif;* par opposition, on dit que les nombres ordinaires sont *positifs* (*ponatur una res*). On doit ces dénominations à Viète.

Un nombre négatif est dépourvu de toute signification relative à la mesure des grandeurs; c'est un pur symbole introduit en algèbre dans un but de généralisation.

36. Les formules (1) et (2), une fois admises pour des valeurs positives de c, s'étendent par cela même au cas où c aurait une valeur numérique négative.

Soit, en effet, $c = -c'$; la formule (2), *appliquée au nombre positif* c', donne

$$A - (-c') = A + c'$$

et, en remplaçant $-c'$ par c,

$$A - c = A + (-c),$$

qui est la formule (1) étendue au cas de c négatif.

De même la formule (1), appliquée au nombre positif c', donne

$$A + (-c') = A - c'$$

et, en remplaçant $-c'$ par c,

$$A + c = A - (-c),$$

qui est la formule (2) étendue au cas de c négatif.

37. Ainsi, dans tous les cas, ajouter $-c$ revient à retrancher c, et retrancher $-c$ signifie ajouter c; il suit de là qu'on peut regarder un *polynôme comme une somme de termes ajoutés les uns aux autres* en désignant par le mot *terme* l'ensemble du signe et du nombre que ce signe affecte. Les deux expressions

$$a + b - c + d - e + f,$$
$$a + b + (-c) + d + (-e) + f,$$

sont, en effet, équivalentes d'après nos règles; un pareil résultat prend particulièrement le nom de *somme algébrique.*

38. Supposons qu'on mette un polynôme en nombres, et soient P la somme des termes positifs, N la somme des termes né-

gatifs; le polynôme équivaut à

$$P - N.$$

Si le nombre N surpasse P et est égal à P + D par exemple, la formule devient

$$P - (P + D),$$

ou

$$P - P - D,$$

ou

$$- D.$$

La valeur numérique d'un polynôme est donc *représentée*, dans ce cas, *par un nombre négatif* dont la valeur absolue est égale à l'excès de la valeur numérique des termes précédés du signe + sur la valeur numérique des termes précédés du signe —. La définition du n° 9 se trouve ainsi généralisée, et l'on voit que, *pour traduire un polynôme en nombres, il faut toujours additionner d'une part les nombres précédés du signe +, de l'autre les nombres précédés du signe —, retrancher la plus petite somme de la plus grande, et donner au reste le signe de la plus forte somme.*

MULTIPLICATION DE DEUX POLYNOMES QUELCONQUES.

39. Des considérations analogues à celles du n° 33 montrent que *la règle donnée* (28) *pour la multiplication de deux polynômes positifs doit nécessairement s'appliquer à tous les cas.*

Les formules

$$(c + a)(d - b) = cd + ad - cb - ab,$$
$$(c - a)(d + b) = cd - ad + cb - ab,$$
$$(c - a)(d - b) = cd - ad - cb + ab,$$

sont donc générales. Pour $c = d = 0$, elles deviennent

(1) $$a(-b) = -ab,$$

(2) $$(-a)b = -ab,$$

(3) $$(-a)(-b) = ab,$$

et elles expriment alors les règles de multiplication des nombres négatifs isolés.

40. Les relations (1), (2), (3), une fois admises pour des valeurs positives de a et de b, s'étendent par cela même au cas où a et b auraient des valeurs numériques négatives.

Par exemple, pour démontrer que la formule (3) subsiste quand a et b sont négatifs et égaux à $-a'$ et $-b'$, on observe que cette formule, appliquée aux nombres positifs a' et b', donne

$$(-a')(-b') = a'b'$$

et, en remplaçant a' et b' par $-a$ et $-b$,

$$ab = (-a)(-b),$$

qui est bien la formule (3) étendue au cas de a et b négatifs.

41. Théorème. — *Un produit est positif ou négatif, suivant que le nombre de ses facteurs négatifs est pair ou impair.*

En effet, introduisons le nombre $(+1)$ comme premier facteur, le signe, qui est d'abord $+$, change chaque fois qu'on rencontre un facteur négatif; il sera donc à la fois $+$ ou $-$ suivant que le nombre des changements de signe, c'est-à-dire le nombre des facteurs négatifs, sera pair ou impair.

Corollaire. — *Les puissances paires d'un nombre négatif sont positives, et les puissances impaires négatives.*

DIVISION.

42. Le dividende, étant le produit du diviseur par le quotient, a le même signe que le diviseur ou un signe contraire, suivant que le quotient est positif ou négatif. Donc le *quotient a le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le dividende et le diviseur ont le même signe ou des signes contraires.*

Ainsi

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

Digitized by Google

EXERCICES.

I. Si l'on pose

$$a+b+c+d+e=-p_1,$$
$$ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de=p_2,$$
$$abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce$$
$$+bde+cde=-p_3,$$
$$abcd+abce+abde+acde+bcde=p_4,$$
$$abcde=-p_5,$$

et

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=S_2,\quad a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=S_3,$$
$$a^4+b^4+c^4+d^4+e^4=S_4;\quad a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=S_5,\ldots;$$

vérifier qu'on a

$$S_2=p_1^2-2p_2,$$
$$S_3=-p_1^3+3p_1p_2-3p_3,$$
$$S_4=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2-4p_4,$$
$$S_5=-p_1^5+5p_1^3p_2-5p_1^2p_3-5(p_2^2-p_4)p_1+5(p_2p_3-p_5),$$
$$a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+\ldots+d^2e^2=\frac{1}{2}(S_2^2-S_4),$$
$$a^3b^3+a^3c^3+\ldots+d^3e^3=\frac{1}{2}(S_3^2-S_6),$$
$$a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+\ldots+c^2d^2e^2=\frac{1}{6}(S_2^3-3S_4S_2+2S_6),$$
$$a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+\ldots+c^3d^3e^3=\frac{1}{6}(S_3^3-3S_6S_3+2S_9).$$

II. Démontrer les inégalités

$$xyz>(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x),$$
$$2(x^2+y^2+z^2)>xy+xz+yz,$$
$$3(x^2+y^2+z^2+u^2)>xy+xz+xu+yz+yu+zu.$$

III. Lorsque l'on considère une suite de termes affectés des signes + et —, on dit qu'il y a variation ou permanence toutes les fois que les signes de deux termes consécutifs sont différents ou sont

les mêmes. Ainsi le polynôme

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 1$$

présente trois variations et deux permanences. Cela posé, si l'on désigne par a un nombre positif, et par P un polynôme entier et rationnel ordonné suivant les puissances décroissantes de x, mais d'ailleurs complet ou incomplet, démontrer les propositions suivantes :

1°. La différence entre les nombres de variations des polynômes P et $P(x - a)$ est un nombre impair, et le premier est moindre que le second;

2°. La différence entre les nombres de variations des polynômes P et $P(x + a)$ est un nombre pair, et le second ne peut surpasser le premier;

3°. Si P est incomplet et qu'on le complète en créant le plus de variations possibles, le nombre des permanences trouvées est égal au nombre des variations du polynôme qu'on obtient en changeant x en $-x$ dans P.

CHAPITRE V.

DIVISION.

DIVISION DES MONOMES.

43. *Pour diviser deux monômes entiers l'un par l'autre, on écrit le dividende au-dessus du diviseur en les séparant par une barre horizontale; puis on simplifie, s'il y a lieu, la fraction ainsi obtenue* (**21**).

EXEMPLE :

$$\frac{+\,30\,a^4\,b^2\,c^3}{-\,6\,a^2\,bc^5} = -\,5\,\frac{a^2\,b}{c^2}.$$

44. Il résulte des propositions démontrées en arithmétique sur les rapports que *le quotient de deux fractions algébriques est égal au produit de la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Ce théorème ramène la division de deux monômes fractionnaires à la multiplication de [illegible]reils monômes; il faut ensuite simplifier, s'il y a lieu.

EXEMPLE :

$$-\frac{5\,a^3 f^3}{4\,bc^4\,d} : \frac{3\,a^6\,c}{bg^2\,h} = -\frac{5\,a^3\,bf^3\,g^2\,h}{12\,a^6\,bc^4\,d} = -\frac{5f^3\,g^2\,h}{12\,a^3\,c^5\,d}.$$

EXPOSANT ZÉRO. — EXPOSANT NÉGATIF.

45. La simplification d'un monôme fractionnaire conduit à deux notations nouvelles.

Soient m et n les exposants qu'une lettre a, commune aux deux termes, possède dans le numérateur et dans le dénominateur; le facteur $\frac{a^m}{a^n}$ du monôme primitif se réduira dans le monôme simplifié à

$$a^{m-n}, \quad 1, \quad \frac{1}{a^{n-m}},$$

suivant qu'on aura

$$m > n, \quad m = n, \quad m < n.$$

Or, si l'on représente

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{a^{n-m}}$$

par les notations

$$a^0 \quad \text{et} \quad a^{-(n-m)},$$

le facteur qui restera après les simplifications aura la forme unique

$$a^{m-n}.$$

D'après cela, pour simplifier un monôme fractionnaire, il suffit d'*écrire à la suite du coefficient numérique, réduit à sa plus simple expression, les diverses lettres des deux facteurs en donnant à chacune d'elles un exposant égal à la différence positive, nulle ou négative de ceux qu'elle a dans le numérateur et le dénominateur.*

Exemple :

$$-\frac{5a^3bf^3g^2h}{15a^5b^2fg^2h} = -\frac{1}{3}a^{-2}b^{-1}f^2g^0h^0.$$

Ces nouvelles notations sont très-importantes : elles sont en harmonie avec l'esprit général des o[illegible] algébriques dont les règles ne doivent pas varier avec la nature des nombres que l'on considère.

46. Il est nécessaire de montrer que la notation des exposants négatifs n'implique pas contradiction, c'est-à-dire que l'égalité

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

qui a lieu *par définition* quand m est positif, s'étend, par cela même, au cas où m a une valeur négative.

Or, soit

$$m = -m',$$

la formule étant vraie pour le nombre positif m', on a

$$a^{-m'} = \frac{1}{a^{m'}} \quad \text{ou} \quad a^{m'} = \frac{1}{a^{-m}},$$

et, en remplaçant m' par sa valeur $-m$,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

qui est la formule étendue au cas de m négatif.

DIVISION DES POLYNOMES.

47. Il est rare que le quotient de deux polynômes puisse s'exprimer par un troisième polynôme, et, dans la plupart des cas, il faut se borner à *indiquer* la division en séparant le dividende et le diviseur par une barre horizontale; on dit alors que *la division est impossible*.

Nous allons toutefois exposer la *marche à suivre pour trouver le polynôme quotient lorsque la division est possible*. Cette recherche repose sur les deux théorèmes suivants :

48. Théorème I.—*Si deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes ou croissantes d'une même lettre, et que le quotient de leur division soit un polynôme ordonné de la même manière, on obtient le premier terme du quotient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.*

En effet, le dividende étant par hypothèse le produit du diviseur par le quotient, le premier terme de ce dividende provient sans réduction (**27**) du produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient : donc le premier terme du quotient résulte de la division du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.

49. Théorème II. — *En multipliant le diviseur par le premier terme du quotient et retranchant le produit du dividende, on obtient un reste qui, divisé par le diviseur, donne l'ensemble des autres termes du quotient.*

En effet, en considérant le quotient comme composé de deux parties, son premier terme et l'ensemble des termes qui suivent, on voit que le produit du diviseur par le quotient, c'est-à-dire le dividende, est égal au produit du diviseur par le premier terme du quotient, augmenté du produit du diviseur par l'ensemble des

autres termes de ce quotient; l'excès du dividende sur la première partie de ce produit est donc égal au produit du diviseur par l'ensemble des termes du quotient qui suivent le premier.

50. Le théorème I fournit le premier terme du quotient; le théorème II ramène la division primitive à une division nouvelle, que l'on ramènera à une troisième, et ainsi de suite. On aura ainsi autant de divisions à faire que le quotient total compte de termes.

MANIÈRE DE DISPOSER L'OPÉRATION.

51. La disposition est la même qu'en arithmétique; seulement quand on écrit un produit partiel au-dessous du dividende partiel dont il doit être retranché, on a le soin de changer tous les signes de ce produit, afin de remplacer la soustraction par une simple réduction.

Exemple :

	$x^6 + a^2$	$x^4 + c^4$	$x^2 - a^2c^4$	$x^2 - a^2$	
	$- 2c^2$	$- a^4$	$- a^6$	$- c^2$	
			$- 2a^4c^2$	$x^4 + 2a^2$	$x^2 + a^4$
				$- c^2$	$+ a^2c^2$
1er produit partiel changé de signe.	$- x^6 + a^2$	x^4			
	$+ c^2$				
1er reste.....	$2a^2$	$x^4 + \ldots$			
	$- c^2$				
2e produit partiel changé de signe.	$- 2a^2$	$x^4 + 2a^4$	x^2		
	$+ c^2$	$+ a^2c^2$			
		$- c^4$			
2e reste		$+ a^4$	$x^2 + \ldots$		
		$+ a^2c^2$			
3e produit partiel changé de signe.		$- a^4$	$x^2 + a^6$		
		$- a^2c^2$	$+ 2a^4c^2$		
			$+ a^2c^4$		
3e reste.....			0		

Digitized by Google

32. L'opération est plus compliquée quand les coefficients des puissances de la lettre ordonnatrice dans le dividende et le diviseur sont des polynômes. Chaque division partielle est alors une division de polynôme qui doit être effectuée à part.

EXEMPLE :

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
3b^4 & x^3+b^3a & x^2+2b^2c & x-6ac \\
-2b^3 & -5b^2c & -3ba^2 & \\
+3b^2a & -9b^2a & +17ac & \\
-2ba & +ba^2 & & \\
 & +6ba & & \\
 & -5ac & & \\
\hline
 & -b^3a & x^2-2b^2c & x \\
 & +5b^2c & -2ac & \\
 & -ba^2 & & \\
 & +5ac & & \\
\hline
 & -9b^2a & x^2-3ba^2 & x-6ac \\
 & +6ba & +15ac & \\
\hline
 & & +3ba^2 & x+6ac \\
 & & -15ac & \\
\hline
 & & 0 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|l}
3b^2 & x^2+ba & x+2c \\
-2b & -5c & \\
\hline
 & b^2 & x-3a \\
 & +a & \\
\end{array}
$$

1re DIVISION PARTIELLE.

$$
\begin{array}{r|l}
3b^4-2b^3+3b^2a-2ba & 3b^2-2b \\
-3b^4+2b^3 & b^2+a \\
\hline
3b^2a-2ba & \\
3b^2a+2ba & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

2e DIVISION PARTIELLE.

$$
\begin{array}{r|l}
-9b^2a+6ba & 3b^2-2b \\
+9b^2a-6ba & -3b \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

DIVISIONS IMPOSSIBLES.

33. *Pour qu'une division soit possible, c'est-à-dire pour que le quotient de deux polynômes puisse s'exprimer par un polynôme, il faut et il suffit que l'un des termes du quotient multiplié par le diviseur donne un produit égal au dividende partiel qui a fourni ce terme.*

La condition est évidemment suffisante; car si elle est remplie, l'excès du dividende sur la somme des produits du diviseur par les divers termes trouvés au quotient est nul, c'est-à-dire que le dividende est égal au produit du diviseur par la somme des termes trouvés au quotient.

La condition est nécessaire; car si la division est possible, on doit trouver un reste nul, après qu'on a retranché successivement du dividende le produit du diviseur par les différents termes du quotient.

Il suit de là qu'en appliquant la méthode précédente à deux polynômes qui ne sont pas divisibles l'un par l'autre, on n'obtiendra jamais un reste nul; et dans le cas où le premier terme de chaque reste sera exactement divisible par le premier terme du diviseur, on sera ainsi conduit à une série d'opérations interminable. *A quel moment pourra-t-on s'arrêter et affirmer que la division est impossible?*

On commencera toujours par déterminer le dernier terme du quotient, ce qui est facile, car on sait que, *lorsque la division est possible*, on obtient le dernier terme du quotient en divisant le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur (**27**). Si donc, en formant les divers termes du quotient ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la lettre ordonnatrice, on trouve un terme de degré moindre que le terme ainsi calculé, on pourra affirmer que la division ne peut pas se faire. De même, dans le cas de polynômes ordonnés suivant les puissances croissantes, on s'arrêtera dès qu'on sera conduit à un terme d'un degré supérieur au terme calculé.

34. *Le quotient de deux polynômes entiers* P *et* P′ *contenant une même lettre* x, *peut toujours se mettre sous la forme d'un polynôme* Q *entier par rapport à* x, *augmenté d'une fraction* $\frac{R}{P'}$ *ayant pour dénominateur le diviseur* P′ *et pour numérateur un polynôme* R *de degré moindre en* x *que* P′; *d'ailleurs cette transformation n'est possible que d'une seule manière.*

Ordonnons, en effet, les deux polynômes P et P′ par rapport aux

puissances décroissantes de x; si nous arrêtons la division dès que nous trouverons un reste de degré moindre en x que le diviseur, les termes obtenus jusqu'alors au quotient seront entiers par rapport à x, et nous aurons, en désignant par R ce reste et par Q ce quotient,

$$P - P'Q = R;$$

d'où

$$\frac{P}{P'} = Q + \frac{R}{P'}.$$

Si d'ailleurs la transformation était possible de deux manières, on aurait l'égalité

$$\frac{P}{P'} = Q' + \frac{R'}{P'},$$

qui, comparée à la première, conduirait à

$$Q + \frac{R}{P} = Q' + \frac{R'}{P'} \quad \text{ou} \quad P'(Q' - Q) = R' - R.$$

Or ce résultat est inadmissible; car Q' et Q étant entiers en x, $Q' - Q$ l'est aussi, et le produit $P'(Q - Q')$ est d'un degré au moins égal au diviseur P', tandis que $R' - R$ est d'un degré inférieur, puisque R et R' sont eux-mêmes d'un degré moindre.

Exemple :

$$(1) \quad \frac{x^3 - 3yx^2 + 6y^2x - 2y^3}{x^2 - 3yx + y^2} = x + \frac{5y^2x - 2y^3}{x^2 - 3yx + y^2}.$$

Quand on ordonne autrement les deux polynômes, on obtient un nouveau quotient et un nouveau reste. Ainsi

$$(2) \quad \frac{-2y^3 + 6xy^2 - 3x^2y + x^3}{y^2 - 3xy + x^2} = -2y + \frac{x^3 - y^2x}{y^2 - 3xy + x^2}.$$

D'ailleurs on passe de la transformée (1) à la transformée (2) en ordonnant le numérateur $5y^2x - 2y^3$ par rapport à y et le divisant, autant que faire se peut, par $y^2 - 3xy + x^2$.

DIVISION PAR $x - a$.

38. *Lorsqu'on divise par $x - a$ un polynôme entier par rapport à x, le reste est égal à la valeur que prend le polynôme quand on y remplace x par a.*

Soient, par exemple,

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

le polynôme proposé; en le divisant par $x - a$, on trouvera pour quotient un polynôme entier par rapport à x de la forme

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

et le reste R sera une quantité qui ne contiendra pas x, puisque le diviseur $x - a$ est du premier degré en x. Ce reste sera donc toujours le même, quelque valeur numérique qu'on attribue à x. Cela posé, considérons l'égalité

$$\begin{aligned} &Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \\ &= (x - a)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) + R, \end{aligned}$$

le second membre n'est autre chose que le premier, écrit d'une autre façon; autrement dit, il est tel, que, si l'on y effectuait les opérations indiquées, on retrouverait terme pour terme le polynôme du premier membre. L'égalité précédente doit donc avoir lieu, quelque valeur qu'on donne à x; or, pour $x = a$, le produit

$$(x - a)(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$$

s'annule, puisque le facteur $x - a$ devient $a - a$ ou o, et que le quotient, ne contenant pas x en dénominateur, prend une valeur finie

$$\alpha a^3 + \beta a^2 + \gamma a + \delta;$$

donc on a

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = R.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

36. Corollaire I. — *Si un polynôme entier en x devient nul pour $x = a$, il est divisible par $x - a$.*

Exemples :

1°. $x^m - a^m$ est toujours divisible par $x - a$, puisqu'il devient

$$a^m - a^m = 0 \quad \text{pour} \quad x = a.$$

On vérifie ce résultat en opérant la division

$$
\begin{array}{l|l}
x^m - a^m & x - a \\
\hline
-x^m + ax^{m-1} & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} \\
\hline
\quad + ax^{m-1} - a^m & \\
\quad - ax^{m-1} + a^2x^{m-2} & \\
\hline
\qquad + a^2x^{m-2} - a^m & \\
\qquad \vdots & \\
\hline
\qquad\qquad + a^m x^0 - a^m. &
\end{array}
$$

Les dividendes successifs sont tous des binômes dont le second terme est $-a^m$; dans le premier terme, l'exposant de a augmente d'une unité, et celui de x diminue d'une unité à chaque opération. On arrivera donc ainsi aux restes

$$a^{m-2}x^2 - a^m, \quad a^{m-1}x - a^m, \quad a^m x^0 - a^m,$$

dont le dernier est nul. Le quotient est d'ailleurs un polynôme de degré $m-1$ homogène, et symétrique par rapport aux lettres x et a. Il mérite d'être retenu.

2°. $x^m - a^m$ est divisible par $x + a$ quand m est pair; car on a

$$x + a = x - (-a),$$

et la substitution de $(-a)$ à x dans $x^m - a^m$ donne $(-a)^m - a^m$, qui s'évanouit lorsque m est pair. En effectuant la division, on trouve, dans ce cas,

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots - a^{m-1}.$$

3°. $x^m + a^m$ est divisible par $x + a$ lorsque m est impair, car la substitution de $(-a)$ à x dans $x^m + a^m$ donne $(-a)^m + a^m$, qui s'évanouit quand m est impair. En effectuant la division, on trouve

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}.$$

87. Corollaire II. — *Si un polynôme entier en x devient nul lorsqu'on y remplace successivement x par les nombres inégaux*

a, b, c, etc., il est divisible par le produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots.$$

Soient P le polynôme proposé, et Q le polynôme entier qu'on obtient en divisant P par $x-a$. Si dans l'égalité

$$P=(x-a)Q,$$

qui doit avoir lieu quel que soit x, on remplace x par b, le premier membre devient nul par hypothèse; quant au second, il devient

$$(b-a)Q_b,$$

en désignant par Q_b le résultat de la substitution de b à x dans le polynôme Q. Ce produit $(b-a)Q_b$ étant nul, et le facteur $b-a$ étant différent de zéro, puisque a et b sont des nombres inégaux, on doit avoir $Q_b=0$; le polynôme Q est donc divisible par $x-b$, et l'on a

$$Q=(x-b)Q',$$

Q′ étant un polynôme entier en x; par suite

$$P=(x-a)(x-b)Q'.$$

En continuant de la même façon, c'est-à-dire en faisant $x=c$ dans cette égalité, on trouverait

$$Q'=(x-c)Q'' \quad \text{et} \quad P=(x-a)(x-b)(x-c)Q'',$$

etc.

EXERCICES.

I. Quelles sont les conditions de divisibilité de x^m-a^m par x^p-a^p?

II. Si un polynôme entier en x et dont les coefficients sont des nombres entiers a pour valeur deux nombres impairs pour $x=0$ et $x=1$, aucun nombre entier substitué à x ne pourra réduire ce polynôme à zéro.

III. Les expressions

$$x^q y^r + y^q z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q,$$

$$x^p y^q z^r + y^p z^q x^r + z^p x^q y^r - x^p z^q y^r - z^p y^q x^r - y^p x^q z^r,$$

sont divisibles par le produit $(x-y)(x-z)(y-z)$.

IV. Simplifier l'expression

$$\frac{(a-b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}.$$

V. Démontrer que N étant un nombre entier quelconque dont les diverses tranches de m chiffres à partir de la droite sont A_1, A_2, A_3, etc., on a

$$N = 10^m(A_2 + A_3 10^m + A_4 10^{2m} + \ldots) + A_1,$$

$$N = [A_2(10^{m-1}) + A_3(10^{2m}-1) + A_4(10^{3m}-1) + \ldots]$$
$$+ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots,$$

$$N = [A_2(10^m+1) + A_3(10^{2m}-1) + A_4(10^{3m}-1) + \ldots]$$
$$+ (A_1 + A_3 + A_5 + \ldots) - (A_2 + A_4 + A_6 + \ldots).$$

Déduire de là les caractères de divisibilité par un diviseur quelconque de 10^m, 10^m-1, 10^m+1.

VI. Vérifier les formules

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{a-b}{b^4}x^3 + \ldots,$$

$$\frac{x+a}{x-b} = 1 + \frac{a+b}{x} + \frac{b(a+b)}{x^2} + \frac{b^2(a+b)}{x^3} + \ldots.$$

CHAPITRE VI.

PRINCIPES GÉNÉRAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS.

DÉFINITIONS.

58. On donne le nom d'*identité* à toute égalité qui a lieu entre des nombres ou entre deux expressions qui se réduisent à des nombres égaux, quelque valeur qu'on attribue aux lettres qu'elles renferment.

Exemples :

$$9 = 4 + 5,$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Une *équation* est une égalité dont les deux membres n'acquièrent des valeurs numériques égales que lorsqu'on y remplace certaines lettres par des nombres convenablement choisis. Ces lettres particulières portent le nom d'*inconnues*, et les valeurs qu'il faut leur donner pour transformer l'équation en identité sont les *racines* ou les *solutions* de cette équation. *Résoudre une équation*, c'est trouver ses racines.

Deux équations sont *équivalentes* lorsqu'elles admettent les mêmes racines, c'est-à-dire lorsque toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'une conviennent à l'autre, et réciproquement.

Un *système d'équations* est l'ensemble de plusieurs équations qui doivent être satisfaites à la fois. Deux systèmes sont équivalents, et, par suite, peuvent être substitués l'un à l'autre, quand toutes les solutions du premier conviennent au second, et inversement.

Théorème I.

59. *En augmentant ou diminuant d'une même quantité les deux membres d'une équation, on obtient une seconde équation équivalente à la première.*

Par exemple, si les valeurs $x = 2$, $y = 4$ satisfont à l'équation

(1) $$y^2 + 2x^2 - 4x = 3xy - 2y,$$

elles satisfont aussi à l'équation

(2) $$(2x - 1) + (y^2 + 2x^2 - 4x) = (3xy - 2y) + (2x - 1),$$

et inversement.

En effet, par hypothèse, les deux membres de l'équation (1) se réduisent à deux nombres égaux pour

$$x = 2 \quad \text{et} \quad y = 4;$$

en ajoutant à ces nombres égaux la valeur correspondante de $2x - 1$, on aura deux sommes égales; et comme ces sommes sont les valeurs numériques des deux membres de l'équation (2) pour

$$x = 2 \quad \text{et} \quad y = 4,$$

l'équation (2) est satisfaite par

$$x = 2 \quad \text{et} \quad y = 4.$$

La réciproque se démontre de même.

60. Corollaire. — *On peut transposer un terme d'un membre dans l'autre, pourvu qu'on change le signe de ce terme.*

Ainsi l'équation

$$y^2 + 2x^2 - 4x = 3xy - 2y$$

équivaut à

$$y^2 + 2x^2 = 3xy - 2y + 4x.$$

Il suffit, en effet, d'ajouter $4x$ aux deux membres de la première équation pour avoir la seconde.

Cette opération portait, chez les Arabes, le nom de *aljabar* (rétablissement, restitution); de là est venu le mot *algèbre*.

Théorème II.

61. *En multipliant ou divisant les deux membres d'une équation par une même quantité dont la valeur n'est pas nulle, on obtient une équation équivalente à la première.*

Ainsi les équations

(1) $$A = B,$$

(2) $$mA = mB$$

sont équivalentes.

Car, en multipliant par la valeur de m les nombres égaux auxquels se réduisent A et B pour les valeurs de x, y, z, etc., qui satisfont à l'équation (1), on obtient des produits égaux; et comme ces produits sont les valeurs numériques de m A et de m B pour ces mêmes valeurs de x, y, z, etc., l'équation (2) est satisfaite par ces valeurs.

On prouverait de même que les solutions de l'équation (2) conviennent à l'équation (1).

62. Corollaire. — Ce théorème permet de *ramener à une forme entière toute équation qui contient des dénominateurs.*

Il est, en effet, évident que les dénominateurs disparaissent quand on multiplie tous les termes de l'équation par le plus petit multiple commun de ces dénominateurs. Ainsi l'équation

$$(3)\qquad \frac{x(a+b)}{a}+\frac{b(x-a)(b-2a)}{a^2-b^2}=3(a-x)+\frac{(a-b)^2}{a+b},$$

multipliée par

$$a(a^2-b^2),$$

prend la forme

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l}(a+b)(a^2-b^2)x+ab(b-2a)(x-a)\\ =3a(a^2-b^2)(a-x)+a(a-b)^3.\end{array}\right.$$

63. Scolie. — Lorsque le dénominateur commun, dont la suppression rend l'équation entière, est un nombre, l'équation transformée est, d'après ce qui précède, tout à fait équivalente à la proposée. Il en est encore de même quand le dénominateur est une quantité algébrique qui ne contient pas d'inconnues, pourvu que la mise en nombres ne réduise pas ultérieurement ce facteur à zéro. Ainsi l'équation (4) tiendra lieu de l'équation (3) tant qu'on donnera à a une valeur différente de zéro et de b.

Quand on multiplie les deux membres d'une équation $A=B$ *par une quantité* C *qui contient une ou plusieurs inconnues, l'équation résultante*

$$AC=BC,\quad \text{ou}\quad (A-B)C=0,$$

est satisfaite, soit par

$$C=0,$$

soit par

$$A - B = 0,$$

en sorte qu'elle *admet non-seulement les solutions de l'équation proposée, mais encore les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le multiplicateur* C.

Par exemple, l'équation

$$(x-2)(3x-4) = 3(x-2),$$

est plus générale que l'équation

$$3x - 4 = 3,$$

elle est satisfaite par

$$x = 2 \quad \text{et} \quad x = \frac{7}{3},$$

tandis que la proposée n'admet que la racine $x = \frac{7}{3}$.

Il suit de là que lorsque le dénominateur commun, dont la suppression rend l'équation entière, contient des inconnues, la transformée n'équivaut à la proposée qu'autant qu'aucune de ses racines n'annule le dénominateur. Il faut donc, après la résolution de l'équation, rejeter comme *étrangères* (c'est-à-dire comme introduites par le calcul), les solutions qui, rendant ce dénominateur nul, ne satisfont pas à l'équation primitive.

Ainsi la transformée

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

de l'équation

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{3(x-1)} = \frac{1}{3(1-x)} - 2,$$

admet pour racines les nombres 1 et 6; mais la solution 1 doit être rejetée comme réduisant à zéro le dénominateur $3(x-1)$.

Toutefois, lorsqu'on rend une équation entière en la multipliant par *le plus petit multiple commun* des dénominateurs, l'équation transformée n'admet le plus souvent pas d'autres racines que celles de la proposée.

THÉORÈME III.

64. *On augmente en général le nombre des solutions d'une équation, en élevant ses deux membres à une même puissance.*

Ainsi l'équation

$$A^2 = B^2$$

est plus générale que l'équation

$$A = B;$$

car elle équivaut à

$$(A + B)(A - B) = 0,$$

laquelle est satisfaite, soit par

$$A + B = 0,$$

soit par

$$A - B = 0:$$

en sorte que l'équation

$$A^2 = B^2$$

contient à la fois les solutions de

$$A = B \quad \text{et de} \quad A = -B.$$

En général, l'équation

$$A^m = B^m \quad \text{ou} \quad A^m - B^m = 0$$

équivaut à

$$(A - B)(A^{m-1} + BA^{m-2} + B^2A^{m-2} + \ldots + B^{m-1}) = 0,$$

et, par suite, contient non-seulement les solutions de l'équation

$$A - B = 0 \quad \text{ou} \quad A = B,$$

mais encore celles de

$$A^{m-1} + BA^{m-2} + \ldots + B^{m-1} = 0.$$

65. COROLLAIRE. — Lorsque, pour rendre une équation rationnelle, on isole le radical et qu'on élève au carré, l'équation nouvelle est plus générale que l'ancienne.

Ainsi, soit l'équation

$$(1) \qquad 5 + \sqrt{5 - x} = x.$$

En isolant le radical, puis élevant au carré le résultat

$$\sqrt{5-x} = x - 5,$$

on obtient

$$(2) \qquad 5 - x = x^2 - 10x + 25.$$

Or on peut vérifier que $x = 4$ et $x = 5$ conviennent à cette équation, tandis que la première relation n'est satisfaite que par $x = 5$.

C'est que la dernière équation est aussi bien le carré de

$$-\sqrt{5-x} = x - 5,$$

qui est satisfaite par $x = 4$, que le carré de

$$+\sqrt{5-x} = x - 5,$$

dont la racine est 5.

Malgré cela, on substitue souvent à une équation irrationnelle une équation rationnelle qu'on a obtenue en élevant les deux membres de la première à une même puissance, après avoir isolé le radical. Mais il faut ensuite chercher par des substitutions quelles sont les racines de l'équation transformée qui satisfont à la proposée, et rejeter les autres racines. Ainsi dans l'exemple précédent la racine 5 était seule admissible.

Théorème IV.

66. *On peut substituer à l'une des équations d'un système une autre équation formée en combinant la première, par addition ou soustraction, avec une ou plusieurs des équations primitives.*

Par exemple, le système

$$(1) \qquad \begin{cases} A = A', \\ B = B', \\ C = C', \\ D = D', \\ E = E', \end{cases}$$

équivaut au système

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{c} A = A', \\ B = B', \\ C + A - E = C' + A' - E', \\ D = D', \\ E = E', \end{array}\right.$$

car tout groupe de valeurs de x, y, z,..., qui transforme les deux membres des équations (1) en nombres égaux, fait évidemment acquérir la même valeur numérique aux deux membres de l'équation

$$C + A - E = C' + A' - E',$$

ainsi qu'aux deux membres de chacune des autres équations (2).

Réciproquement, si pour certaines valeurs de x, y, z,..., les équations (2) sont satisfaites, c'est que, pour ces mêmes valeurs, C et C' deviennent des nombres égaux, et, par suite, que les équations (1) sont vérifiées.

Scolie. — La démonstration ne dépend ni du nombre des inconnues, ni de la forme et du nombre des équations. De plus, comme une équation n'est pas altérée par l'introduction d'un même facteur dans ses deux membres, *on peut, avant de combiner les équations d'un système par addition ou soustraction, les multiplier par des nombres quelconques.*

Théorème V.

67. *Quand l'une des équations d'un système est résolue par rapport à une inconnue, on peut remplacer cette inconnue par sa valeur dans les autres équations.*

Ainsi, par exemple, le système

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{11 + 2y + 5z}{3}, \\ 5x + 3y = 7u + 47, \\ 11u - 2t + 4z = 9, \\ 8t = 5y + 25, \\ 2x - 13u = 5, \end{array}\right.$$

équivant au système

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{11 + 2y + 5z}{3}, \\ 5\,\dfrac{11 + 2y + 5z}{3} + 3y = 7u + 47, \\ 11u - 2t + 4z = 9, \\ 8t = 5y + 25, \\ 2\,\dfrac{11 + 2y + 5z}{3} - 13u = 5. \end{cases}$$

En effet, pour qu'un groupe de valeurs

$$x = 9, \quad y = 3, \quad z = 2, \quad u = 1, \quad t = 5,$$

qui convient au système (1), satisfasse au système (2), il faut et il suffit que l'expression $\dfrac{11 + 2y + 5z}{3}$ représente pour ces valeurs le même nombre que x (ici 9). Or cette condition est remplie, puisque l'équation $x = \dfrac{11 + 2y + 5z}{3}$ fait partie du premier système.

On démontrerait de même que toute solution des équations (2) convient aux équations (1).

La démonstration est indépendante du nombre des inconnues, ainsi que du nombre et de la forme des équations.

68. *Définition.* — *Éliminer* une inconnue entre m équations, c'est substituer au système primitif un système équivalent dont $m - 1$ équations ne renferment pas cette inconnue. Ainsi le procédé qui, dans l'exemple précédent, a servi à passer du système (1) au système (2) est un procédé particulier d'élimination, connu sous le nom de *méthode de substitution.*

PRINCIPES RELATIFS AUX INÉGALITÉS.

69. On dit qu'*un nombre* A *est plus grand qu'un nombre* B, *lorsque la différence* A — B *est positive.*

Il suit de là qu'un nombre positif ou nul est plus grand qu'un

nombre négatif, et que de deux nombres négatifs, celui-là est le plus grand qui a la plus petite valeur absolue.

70. *On peut sans changer le sens d'une inégalité, augmenter ou diminuer ses deux membres d'une même quantité.*

En effet, l'inégalité $A > B$ donne $A = B + p$, p étant un nombre positif; et en ajoutant C aux deux membres de cette égalité, on a

$$A + C = B + C + p, \quad \text{ou} \quad A + C > B + C.$$

71. On démontre d'une manière analogue que :

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ou divisant ses deux membres par un même nombre positif.

On change le sens d'une inégalité en multipliant ou divisant ses deux membres par un nombre négatif.

La somme de plusieurs inégalités de même sens est une inégalité de même sens que les proposées.

Le produit de plusieurs inégalités de même sens est une inégalité de même sens que la première, lorsque les membres des inégalités proposées sont tous des nombres positifs; sans cette restriction, c'est-à-dire en appliquant ce théorème à des inégalités dont les membres sont négatifs, on pourrait être conduit à des résultats absurdes; ainsi les inégalités $10 > 6$, $-3 > -4$ donneraient $-30 > -24$, résultat faux.

Lorsque deux nombres négatifs sont inégaux, leurs carrés forment une inégalité en sens contraire. Ainsi $-a > -b$ équivaut à $a < b$, d'où l'on déduit $a^2 < b^2$ ou $(-a)^2 < (-b)^2$.

EXERCICES.

I. En désignant par $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$, une série de fractions égales, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \ldots = \frac{ma + na' + pa'' + \ldots}{mb + nb' + pb'' + \ldots} = \frac{\sqrt{n^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}}.$$

II. Soient $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$, plusieurs fractions dont les numérateurs sont quelconques et les dénominateurs sont tous positifs, la fraction $\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$ a une valeur comprise entre la plus petite et la plus grande des fractions proposées.

III. Si $x^2 + 2ay^2$ est un carré, $x^2 + ay^2$ est la somme de deux carrés.

IV. Les relations

$$2(ab + pq) = (a + b)(p + q), \quad 2(ac + rs) = (a + c)(r + s),$$
$$2(cd + pq) = (c + d)(p + q), \quad 2(bd + rs) = (b + d)(r + s),$$

entraînent

$$2(rs + pq) = (r + s)(p + q).$$

V. Si dans le polynôme

$$ax^2 + 2bxy + cx^2,$$

on pose

$$x = \alpha X + \alpha' Y, \quad y = \beta X + \beta' Y,$$

ce polynôme prend la forme

$$AX^2 + 2BXY + CY^2;$$

calculer l'expression

$$\frac{B^2 - 4AC}{b^2 - 4ac}.$$

VI. Si dans le polynôme

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

on pose

$$x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,$$
$$z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z,$$

ce polynôme prend la forme

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'XZ + 2B''XY;$$

calculer l'expression

$$\frac{AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2}{aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2}.$$

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

DÉFINITION.

72. On appelle *degré* d'une équation *entière par rapport aux inconnues*, la somme des exposants des inconnues prise dans le terme où elle est la plus forte. Ainsi l'équation

$$x^7 - 5x^2y^4 + 1506 = 0$$

est du degré 7.

Pour évaluer le degré d'une équation, il faut d'abord rendre les deux membres de cette équation entiers par rapport aux inconnues.

Il ne sera question, dans ce chapitre, que des équations du premier degré.

CAS D'UNE SEULE ÉQUATION.

73. Règle. — *Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue, on chasse tous les dénominateurs; on fait passer tous les termes en x dans un membre et tous les termes indépendants de x dans l'autre; puis on effectue les réductions et on divise par le coefficient de l'inconnue.*

La démonstration de cette règle résulte des théorèmes II et III du chapitre précédent.

Premier exemple. — L'équation

$$\frac{37}{6}x - \frac{3}{8}x + \frac{317}{2} = \frac{49}{3}x + 19$$

multipliée par le plus petit multiple commun des dénominateurs

$$2^3.3$$

devient

$$148x - 9x + 3804 = 392x + 456;$$

on isolè alors les termes en x, et le résultat

$$3804 - 456 = 392x + 9x - 148x$$

ramene à la forme plus simple

$$3348 = 253x,$$

donne pour x la valeur

$$x = \frac{3348}{253} = 13 + \frac{59}{253}.$$

Second exemple. — L'équation

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^3}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}x = 3cx + \frac{b}{a}x$$

multipliée par le plus petit multiple commun des dénominateurs

$$a(a+b)^3$$

devient

$$\begin{aligned} &3a^2bc(a+b)^2 + a^3b^2 + b^2(2a+b)(a+b)x \\ &= 3ac(a+b)^3x + b(a+b)^3x. \end{aligned}$$

On isole alors les termes en x, et le résultat

$$\begin{aligned} 3a^2bc(a+b)^2 + a^3b^2 &= 3ac(a+b)^3x \\ &+ b(a+b)^3x - b^2(2a+b)(a+b)x \end{aligned}$$

ramené successivement aux formes plus simples

$$a^2b[3c(a+b)^2 + ab] = (a+b)x[3ac(a+b)^2 + a^2b],$$
$$ab = (a+b)x,$$

donne pour x la valeur

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

ÉQUATIONS QUI SE RAMÈNENT AU PREMIER DEGRÉ.

74. La méthode qui vient d'être exposée réussit quelquefois pour des équations de degré supérieur au premier.

Exemples :

1°. Si l'équation précédente contenait x^m ou $\sqrt[m]{x}$ au lieu de x, ou

obtiendrait, en suivant le procédé indiqué,

$$x^m = \frac{ab}{a+b}, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt[m]{\frac{ab}{a+b}},$$

ou

$$\sqrt[m]{x} = \frac{ab}{a+b}, \quad \text{d'où} \quad x = \left(\frac{ab}{a+b}\right)^m.$$

2°. Soit l'équation

$$\frac{7x^n}{x+1} + \frac{3x^n + 6x^{n+2}}{x^2-1} = \frac{6x^{n+1}}{x-1}.$$

On supprime d'abord la solution $x = 0$, en divisant par x^n; on est alors ramené à l'équation

$$\frac{7}{x+1} + \frac{3+6x^2}{x^2-1} = \frac{6x}{x-1},$$

qui, multipliée par $x^2 - 1$, devient

$$7(x-1) + 3 + 6x^2 = 6x(x+1)$$

ou

$$7x - 7 + 3 + 6x^2 = 6x^2 + 6x,$$

$$x = 4.$$

3°. Soit encore l'équation

$$2x + 2\sqrt{a^2+x^2} = \frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

où $\sqrt{a^2+x^2}$ représente un nombre positif.

Chassons le dénominateur, puis, après avoir isolé le radical,

$$2x\sqrt{a^2+x^2} = 3a^2 - 2x^2,$$

élevons au carré; le résultat simplifié donne

$$16a^2x^2 = 9a^4,$$

d'où

$$x = \pm\frac{3}{4}a.$$

Il est facile de vérifier que $x = \frac{3}{4}a$ satisfait seule à l'équation pri-

mitive; on a introduit la solution étrangère $x = -\frac{3}{4}a$ en élevant au carré.

CAS DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

75. Une équation du premier degré à deux inconnues x et y ne peut contenir que trois sortes de termes :

Des termes du premier degré en x;
Des termes du premier degré en y;
Des termes indépendants de x et de y.

Si donc, après avoir chassé les dénominateurs, on isole les termes tout connus dans un membre, on aura, réductions faites, une équation telle que

$$4x + 3y = 24.$$

Une seule équation de ce genre ne suffit pas pour déterminer x et y : on voit en effet, en la mettant sous la forme

$$x = \frac{24 - 3y}{4},$$

qu'à toute valeur arbitraire donnée à y, correspond une valeur de x; le problème est donc indéterminé, et il faut se donner une autre équation.

76. *Élimination par substitution.* — Soient les deux équations

$$4x + 3y = 24,$$
$$5x - 2y = 7.$$

Ce système équivaut (**75**) à

$$x = \frac{24 - 3y}{4},$$
$$5x - 2y = 7$$

qui, en vertu du théorème (**67**), peut être remplacé par

$$x = \frac{24 - 3y}{4},$$
$$5\,\frac{24 - 3y}{4} - 2y = 7,$$

ou par

$$x = \frac{24 - 3y}{4},$$
$$y = 4,$$

puisque l'équation $5\frac{24 - 3y}{4} - 2y = 7$ du premier degré en y est équivalente, d'après la théorie donnée, à $y = 4$.

Dès lors, si l'on applique à ce dernier système le théorème (**67**), on obtient le groupe

$$x = \frac{24 - 3.4}{4} = 3,$$
$$y = 4,$$

qui admet les mêmes solutions que le système primitif.

On voit que *chacune des inconnnes n'a qu'une valeur*, et la marche à suivre peut être formulée ainsi :

Portez dans la seconde équation la valeur de x tirée de la première; et, après avoir résolu par rapport à y la seconde équation transformée, mettez la valeur de y dans la formule de x.

77. *Élimination par réduction.* — Soient encore les deux équations

$$4x + 3y = 24,$$
$$5x - 2y = 7.$$

En multipliant successivement chacune d'elles par le coefficient que l'inconnue y a dans l'autre, on obtient le système

$$8x + 6y = 48,$$
$$15x - 6y = 21,$$

qui équivaut au premier (**61**).

Mais alors, y ayant des coefficients égaux et de signes contraires, l'addition des deux équations en fournira une troisième

$$8x + 15x = 69,$$

qui, substituée à l'une quelconque des précédentes (**66**), donnera la valeur de x, puisqu'elle est du premier degré en x

seul :

$$x = \frac{69}{23} = 3.$$

On aura la valeur de y, soit en faisant $x = 3$ dans l'une des équations proposées, soit en opérant directement par rapport à x, comme on l'a fait relativement à y.

L'esprit de cette méthode consiste à substituer au système primitif deux équations nouvelles qui, contenant l'une des inconnues avec des coefficients égaux, donnent l'autre inconnue par addition ou soustraction.

78. Le plus souvent *les coefficients de l'inconnue à éliminer ne sont pas premiers entre eux;* alors, pour les rendre égaux, on cherche leur plus petit multiple commun, puis on multiplie chaque équation par le produit des facteurs de ce plus petit multiple commun, que ne contient pas le coefficient de l'inconnue dans cette équation.

Exemple :

$$60x - 17y = 146,$$
$$48x + 13y = 170,$$

on a

$$60 = 5.3.2^2,$$
$$48 = 3.2^4.$$

Le plus petit multiple commun des coefficients de x est donc

$$5.3.2^4,$$

et pour rendre égaux ces coefficients, il suffit de multiplier la première équation par 2^2 et la seconde par 5; on obtient deux nouvelles équations dont la différence est

$$(13.5 + 17.4)y = 170.5 - 146.4,$$

d'où

$$y = 2.$$

79. Il est des cas où l'on ne peut trouver des valeurs convenables de x et de y : par exemple, les équations

$$5x - 2y = 7,$$
$$15x - 6y = 23,$$

sont *incompatibles*. On voit en effet que, quelque nombre qu'on mette à la place des inconnues, la valeur numérique du premier membre de la première équation sera toujours le tiers de la valeur numérique du premier membre de la seconde, tandis que 7 n'est pas le tiers de 23.

D'ailleurs, en opérant par substitution, on trouvera l'égalité impossible

$$15\frac{7+2y}{5}-6y=23,$$

ou

$$21=23,$$

qui montrerait bien que les équations primitives étaient contradictoires, si on ne l'avait pas reconnu à priori.

80. Le système

$$5x-2y=7,$$
$$15x-6y=21$$

est, au contraire, *indéterminé*, puisque la seconde équation étant le produit de la première par 3, on n'a en réalité qu'une relation entre x et y.

Aussi, en opérant par substitution, est-on conduit à remplacer l'une des équations proposées par une identité

$$15\frac{7+2y}{5}-6y=21,$$

ou

$$21=21.$$

CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ÉQUATIONS.

81. Soient, par exemple, les quatre équations à quatre inconnues

$$(1)\quad \begin{cases} 3x+6y-2z+9u=6, \\ 4y-5x+5z-6u=5, \\ 2z-3x+8y-3u=3 \\ 9u+10y+3z-4x=9. \end{cases}$$

En remplaçant, dans les trois dernières équations, x par sa valeur tirée de la première, on substitue au système (1) un système

équivalent

$$(2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3}, \\ 4y - 5\dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3} + 5z - 6u = 5, \\ 2z - 3\dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3} + 8y - 3u = 3, \\ 9u + 10y + 3z - 4\dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3} = 9, \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3}, \\ 42y + 5z + 27u = 45, \\ 14y + 6u = 9, \\ 63u + 54y + z = 51, \end{cases}$$

dans lequel les trois dernières équations ne contiennent que y, z et u.

En remplaçant, dans les équations intermédiaires, z par sa valeur tirée de la dernière, on substitue au système (2) un système équivalent

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3}, \\ 42y + 5(51 - 63u - 54y) + 27u = 45, \\ 14y + 6u = 9, \\ z = 51 - 63u - 54y, \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3}, \\ 114y + 144u = 105, \\ 14y + 6u = 9, \\ z = 51 - 63u - 54y, \end{cases}$$

dans lequel les deux équations du milieu ne contiennent que y et u.

En remplaçant, dans la seconde équation, u par sa valeur déduite de la troisième, on substitue au système (3) un système équivalent

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3}, \\ 114y + 144\,\dfrac{9 - 14y}{6} = 105, \\ u = \dfrac{9 - 14y}{6} \\ z = 51 - 63u - 54y, \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{6 - 6y + 2z - 9u}{3}, \\ y = \dfrac{1}{2}, \\ u = \dfrac{9 - 14y}{6}, \\ z = 51 - 63u - 54y, \end{array}\right.$$

dans lequel la seconde équation est résolue par rapport à y.

Portant alors cette valeur de y dans

$$u = \frac{9 - 14y}{6},$$

on trouve

$$u = \frac{9 - \frac{14}{2}}{6} = \frac{1}{3},$$

puis en faisant

$$y = \frac{1}{2}, \quad u = \frac{1}{3},$$

dans

$$z = 51 - 63u - 54y,$$

on obtient

$$z = 51 - \frac{63}{3} - \frac{54}{2} = 3,$$

et enfin la formule

$$x = \frac{6 - 6y + 2z - 9u}{3}$$

donne pour $y = \frac{1}{2}$, $u = \frac{1}{3}$, $z = 3$,

$$x = \frac{6 - \frac{6}{2} + 2.3 - \frac{9}{3}}{3} = 2.$$

Les valeurs des inconnues sont donc

$$x = 2, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = 3, \quad u = \frac{1}{3},$$

82. Cette méthode, dite de *substitution*, est évidemment applicable à un système de n équations du premier degré à n inconnues. En remplaçant l'une des inconnues, par sa valeur tirée de l'une des équations, on est ramené à un système de $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues, sur lequel on opère comme sur le premier, etc.

On n'obtient en général qu'une valeur pour chaque inconnue. Ce procédé est surtout avantageux quand les coefficients sont de grands nombres; dans les autres cas, on préfère la méthode plus élégante des *multiplicateurs*, qui est due à Bezout.

Soit, par exemple, le système

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 3z &= 5, \\ x + 2y - 12z &= 4, \\ 8y + 6z - 3x &= 0; \end{aligned}$$

on multiplie la deuxième équation par λ, la troisième par λ', puis on les ajoute à la première ; le résultat

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x(2 + \lambda - 3\lambda') \\ & + y(-6 + 2\lambda + 8\lambda') \\ & + z(3 - 12\lambda + 6\lambda') = 5 + 4\lambda \end{aligned} \right.$$

tient lieu de l'une quelconque des équations proposées (**66**), quels que soient les *nombres indéterminés* λ et λ'.

On pose

$$-6+2\lambda+8\lambda'=0,$$
$$3-12\lambda+6\lambda'=0,$$

ou

$$\lambda+4\lambda'=3,$$
$$4\lambda-2\lambda'=1;$$

les valeurs

$$\lambda=\frac{5}{9},\quad \lambda'=\frac{11}{18},$$

tirées de ces deux relations, réduisent l'équation (1) à

$$x\left(2+\frac{5}{9}-3\cdot\frac{11}{18}\right)=5+4\cdot\frac{5}{9},$$

d'où

$$x=10.$$

Si maintenant on annule les coefficients de x et de z dans l'équation (1), on obtiendra deux nouvelles relations en λ et λ', d'où l'on tirera pour ces indéterminées des valeurs qui, substituées dans l'équation (1), réduiront cette équation à

$$y=3.$$

De même on obtiendra

$$z=1$$

en déterminant λ et λ' par la condition que les coefficients de x et de y dans (1) soient égaux à zéro.

On voit que cette méthode ramène aussi la résolution de trois équations à trois inconnues à celle de deux équations à deux inconnues, et en général change le système proposé en un autre qui a une équation et une inconnue de moins.

SIMPLIFICATION. — PROCÉDÉS PARTICULIERS.

83. Lorsqu'une inconnue a l'unité pour coefficient dans l'une des équations proposées, on commence par éliminer cette inconnue : c'est le moyen d'éviter les dénominateurs.

Quand le système possède une ou plusieurs équations qui ne contiennent pas toutes les inconnues, on élimine de préférence l'inconnue qui entre dans le moins d'équations; c'est le moyen de

diminuer le nombre des substitutions. Mais si l'une des inconnues n'entre que dans une seule équation, il faut au contraire garder cette équation pour la fin.

84. D'autres fois on laisse entièrement de côté la marche générale; l'inspection des équations suggère des expédients plus simples, qui mènent droit au but, et que l'habitude seule du calcul permet d'apercevoir.

Voici quelques exemples :

1°. Soit le système

$$\begin{aligned} x+y+z+t+u&=a,\\ x+y+z+t+v&=b,\\ x+y+z+u+v&=c,\\ x+y+t+u+v&=d,\\ x+z+t+u+v&=e,\\ y+z+t+u+v&=f. \end{aligned}$$

En faisant la somme, on a l'équation

$$x+y+z+t+u+v=\frac{1}{5}(a+b+c+d+e+f)=\frac{s}{5},$$

et il suffit de retrancher successivement de cette relation chacune des équations primitives pour trouver les valeurs

$$x=\frac{s}{5}-f,\quad y=\frac{s}{5}-e,\quad z=\frac{s}{5}-d,$$

$$t=\frac{s}{5}-c,\quad u=\frac{s}{5}-c,\quad v=\frac{s}{5}-a.$$

2°. Soient encore les équations

$$\frac{xyz}{y+z}=a,\quad \frac{xyz}{x+z}=b,\quad \frac{xyz}{x+y}=c.$$

En renversant, on a

$$\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{a},\quad \frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{b},\quad \frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{c}.$$

Dès lors si de la somme de ces trois équations on retranche suc-

cessivement chacune d'elles, on trouve

$$\frac{1}{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right),\quad \frac{1}{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right),$$

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right),$$

ou, en posant $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{p}$,

$$\frac{1}{yz}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a},\quad \frac{1}{xz}=\frac{1}{p}-\frac{1}{b},\quad \frac{1}{xy}=\frac{1}{p}-\frac{1}{c}.$$

Enfin, en divisant chacune de ces équations par la racine carrée de leur produit, on obtient

$$x=\sqrt{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{c}\right)}},$$

$$y=\sqrt{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{b}}{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{c}\right)}},$$

$$z=\sqrt{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{b}\right)}}.$$

3°. M. Binet a indiqué un procédé très-élégant pour résoudre le système

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

Digitized by Google

On a identiquement

$$1-\frac{x^2}{t}-\frac{y^2}{t-b^2}-\frac{z^2}{t-c^2}=\frac{t^3+At^2+Bt+C}{t(t-b^2)(t-c^2)},$$

A, B, C étant des coefficients qu'il est inutile de calculer. Le premier membre de cette relation s'annule pour $t=\rho^2$, $t=\mu^2$, $t=\nu^2$ à cause des équations proposées. Le polynôme t^3+At^2+Bt+C devient donc nul pour les mêmes valeurs de t; il est donc égal au produit $(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)$, et l'on a

$$1-\frac{x^2}{t}-\frac{y^2}{t-b^2}-\frac{z^2}{t-c^2}=\frac{(t-\rho^2)(t-\mu^2)(t-\nu^2)}{t(t-b^2)(t-c^2)}.$$

Multipliant par t, puis faisant $t=0$, on obtient

$$x^2=\frac{\rho\mu\nu}{bc};$$

multipliant par $t-b^2$, puis faisant $t=b^2$, on trouve

$$y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}.$$

Enfin, il suffit de multiplier par $t-c^2$ et de faire $t=c^2$, pour avoir

$$z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}.$$

CAS OU LE NOMBRE DES ÉQUATIONS N'EST PAS ÉGAL A CELUI DES INCONNUES.

85. Si l'on donne $m+n$ équations entre m inconnues, on résoudra par les méthodes précédentes les m équations les plus simples; et pour qu'il existe un groupe de valeurs de $x, y, z, \ldots$, satisfaisant au système entier, il faudra que la substitution des valeurs déjà trouvées pour ces inconnues rende les n équations restantes identiques. Quand cela n'aura pas lieu, le système proposé sera *impossible*.

Par exemple, le système

$$7x+5y=34,\quad 8x-3y=4,\quad 4x+3y=17$$

est impossible, puisque les valeurs

$$x = 2, \quad y = 4,$$

déduites des deux premières équations, transforment la dernière en une absurdité

$$20 = 17.$$

Lorsque le système proposé contient des coefficients littéraux, on peut chercher quelles conditions il faut imposer aux nombres indéterminés représentés par ces lettres, pour rendre les équations compatibles.

Ainsi, en portant dans la troisième des équations

$$x + y = a, \quad x - y = b, \quad x = 2y$$

les valeurs

$$x = \frac{1}{2}(a + b), \quad y = \frac{1}{2}(a - b),$$

déduites des deux premières, on trouve la relation

$$a + b = 2(a - b) \quad \text{ou} \quad a = 3b,$$

qui doit exister entre a et b pour que le système proposé soit possible. Dans cette hypothèse, les valeurs de x et de y se réduisent à

$$x = 2b, \quad y = b.$$

86. Quand on donne m équations entre $m + n$ inconnues, les méthodes précédentes fournissent pour m de ces inconnues des valeurs qui contiennent les n inconnues restantes, ou, comme on dit, qui sont *exprimées en fonction* des n autres inconnues. Alors on peut substituer à ces dernières les nombres qu'on veut, il en résulte toujours des solutions pour les autres; le système proposé est donc *indéterminé*.

Ainsi les deux équations

$$4x - 5y + 3z - 2t = 10,$$
$$3x + 2y - 5z - 4t = 12$$

donnent les valeurs de x et de t; par exemple,

$$x = \frac{8 + 12y - 11z}{5}, \quad t = \frac{23y - 29z - 18}{10},$$

en fonction de y et de z.

Digitized by Google

CAS D'IMPOSSIBILITÉ ET D'INDÉTERMINATION

87. En résolvant un système d'équations du premier degré, on rencontre quelquefois dans le cours du calcul des conditions absurdes ou des équations évidemment contradictoires.

Ainsi l'élimination de y entre la relation (1) et chacune des équations (2) et (3)

$$(1) \qquad 2x + y - 8z = 10,$$
$$(2) \qquad 3x - 2y + 5z = 14,$$
$$(3) \qquad 8x - 3y + 2z = 35,$$

mène aux égalités

$$7x - 11z = 34, \quad 7x - 11z = \frac{65}{2},$$

qui sont évidemment incompatibles.

Un tel système, qui ne peut être vérifié par aucun groupe de valeurs simultanées de x, y, z, est *impossible*.

88. Il peut se faire encore qu'en partant d'équations données, on arrive à des identités, ou à un système dont plusieurs équations sont les mêmes. Il y a alors *indétermination*, c'est-à-dire que plusieurs inconnues, quelquefois toutes, peuvent recevoir des valeurs quelconques sans cesser de satisfaire aux équations proposées.

Ainsi le système

$$2x + y - 8z = 10,$$
$$3x - 2y + 5z = 14,$$
$$8x - 3y + 2z = 38$$

donne, lorsqu'on élimine y entre la première équation et chacune des deux autres,

$$7x - 11z = 34, \quad 14x - 22z = 68.$$

Comme ces relations sont les mêmes et qu'elles tiennent lieu de deux des équations proposées, le système primitif équivaut à

$$2x + y - 8z = 10,$$
$$7x - 11z = 34,$$

il est donc indéterminé.

Digitized by Google

Soit encore le groupe

$$3x - 2y + 5z = 14,$$
$$6x - 4y - 3z = 15,$$
$$9x - 6y - 7z = 20.$$

Si l'on élimine y entre la première équation et chacune des deux autres, on trouve

$$13z = 13, \qquad 22z = 22.$$

Ces relations équivalent l'une et l'autre à

$$z = 1,$$

et le système primitif peut être remplacé par

$$3x - 2y = 9, \qquad z = 1;$$

en sorte que x et y sont seuls indéterminés.

EXERCICES.

I. Résoudre les équations :

$$\frac{bx}{2x-a} - \frac{(3bc^2 + ad)x}{2ab(a+b)} - \frac{5ab}{a^2 - b^2} = \frac{(3bc - ad)x}{2ab(a-b)},$$

$$\frac{a}{bx} + \frac{c}{dx} + \frac{e}{fx} + \frac{g}{hx} = k, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \sqrt{\frac{1}{a^2x^2} + \frac{1}{x^4}}}.$$

II. Résoudre les systèmes :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \\ mx + ny + pz = r; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b-x}{b-m} + \frac{b'-y}{b'-m'} = 1, \\ \frac{b-x}{b-n} + \frac{b'-y}{b'-n'} = 1, \\ \frac{n-x}{n-m} + \frac{n'-y}{n'-m'} = 1; \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = c, \\ a_1x_2 + b_1x_3 = c_1, \\ a_2x_3 + b_2x_4 = c_2, \\ a_3x_4 + b_3x_5 = c_3, \\ a_4x_5 + b_4x_1 = c_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + b\,(y + z + v) = c, \\ ay + b_1\,(z + v + x) = c_1, \\ az + b_2\,(v + x + y) = c_2, \\ av + b_3\,(x + y + z) = c_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + (y + z + v)\,b = c, \\ a_1y + (z + v + x)\,b = c_1, \\ a_2z + (v + x + y)\,b = c_2, \\ a_3v + (x + y + z)\,b = c_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + a^3x + a^2y + az + v = 0, \\ b^4 + b^3x + b^2y + bz + v = 0, \\ c^4 + c^3x + c^2y + cz + v = 0, \\ d^4 + d^3x + d^2y + dz + v = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u + v = 1, \\ x + ay + bz + cu + dv = 0, \\ x + a^2y + b^2z + c^2u + d^2v = 0, \\ x + a^3y + b^3z + c^3u + d^3v = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

ÉQUATION A UNE INCONNUE.

89. On peut ramener toute équation du premier degré à une inconnue à la forme

$$ax = b. \tag{1}$$

Il suffit pour cela de chasser les dénominateurs, puis d'isoler les termes en x dans un membre, et les quantités connues dans l'autre.

En divisant alors par a, on remplace l'équation (1) par la formule

$$x = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

Toutefois cette substitution n'est légitime qu'autant que a est différent de zéro (**61**).

SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

90. On sait que toute équation du premier degré à deux inconnues peut être ramenée à la forme

$$ax + by = c,$$

où a, b, c sont des quantités indépendantes de x et de y.

Soit donc le système

$$ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'. \tag{1}$$

En opérant par *substitution*, on est conduit à remplacer successi-

Digitized by Google

vement ce système par les systèmes équivalents :

$$(2)\qquad x = \frac{c - by}{a}, \quad a'x + b'y = c',$$

$$(3)\qquad x = \frac{c - by}{a}, \quad a'\frac{c - by}{a} + b'y = c',$$

$$(4)\qquad x = \frac{c - by}{a}, \quad y(ab' - ba') = ac' - ca',$$

$$(5)\qquad x = \frac{c - by}{a}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

$$(6)\qquad x = \frac{c - b\dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}}{a}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

$$(7)\qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

et l'on voit que *deux équations simultanées du premier degré à deux inconnues admettent en général un système de solutions et n'en admettent qu'un.*

91. On peut d'ailleurs vérifier que la méthode de réduction et la méthode des multiplicateurs conduisent aussi aux formules (7).

Cherchons, par exemple, y par la méthode de réduction. En multipliant la première des équations (1) par a', la deuxième par a, et retranchant, on obtient

$$y(ab' - ba') = ac' - ca', \quad \text{d'où} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Demandons, au contraire, la valeur de x à la méthode des multiplicateurs; et pour cela, ajoutons la première équation au produit de la deuxième par l'indéterminée λ; la relation

$$(a + \lambda a')x + (b + \lambda b')y = c + \lambda c'$$

tient lieu de l'une des proposées, quel que soit λ, et, par suite, pour la valeur particulière

$$\lambda = -\frac{b}{b},$$

Digitized by Google

qui fait évanouir les termes en y, et donne

$$\left(a - \frac{ba'}{b}\right) x = c - \frac{bc}{b'},$$

d'où

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

92. L'inspection des formules (7) conduit à la règle suivante :

1°. *Pour former le dénominateur commun des valeurs de x et de y, on écrit successivement la lettre b à droite et à gauche de a, ce qui donne ab et ba; puis on sépare ces deux termes par le signe —, après avoir accentué la dernière lettre de chacun d'eux.*

2°. *Pour former le numérateur d'une inconnue, on remplace dans $ab' - ba'$ chacun des coefficients de cette inconnue par le second membre de celle des équations proposées où entre ce coefficient.* Ainsi le numérateur de x s'obtient du dénominateur commun $ab' - ba'$ par la substitution de c et c' à a et a'.

SYSTÈME DE TROIS ÉQUATIONS A TROIS INCONNUES.

93. Soit le système

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by + cz = k, \\ a'x + b'y + c'z = k', \\ a''x + b''y + c''z = k''. \end{cases}$$

Appliquons la méthode des multiplicateurs qui est seule employée en analyse pour les équations littérales.

En multipliant la deuxième équation par λ', la troisième par λ'' et ajoutant les résultats à la première, on obtient la relation

$$(2) \qquad \begin{cases} (a + a'\lambda' + a''\lambda'')x + (b + b'\lambda' + b''\lambda'')y \\ + (c + c'\lambda' + c''\lambda'')z = k + k'\lambda' + k''\lambda'', \end{cases}$$

qui remplace l'une des proposées, quels que soient λ' et λ''.

On détermine λ' et λ'' par la condition que les termes en y et z disparaissent, c'est-à-dire que l'on pose

$$b + b'\lambda' + b''\lambda'' = 0,$$
$$c + c'\lambda' + c''\lambda'' = 0,$$

et en substituant dans l'équation (2) les valeurs de λ' et λ'' tirées de ces deux équations, on arrive à

$$x\left(a + a'\frac{b''c - bc''}{b'c'' - c'b''} + a''\frac{bc' - cb'}{b'c'' - c'b''}\right)$$
$$= k + k'\frac{b''c' - b'c''}{b'c'' - c'b''} + k''\frac{cb' - bc'}{b'c'' - c'b''};$$

d'où

$$(3)\quad x = \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Au lieu de calculer directement y et z, on déduit leurs valeurs de la formule précédente par des *permutations circulaires*.

Fig. 1.

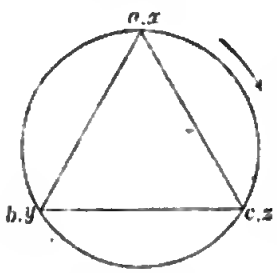
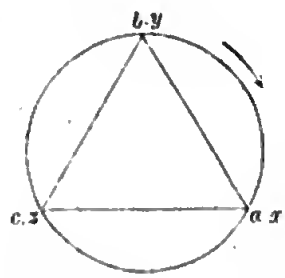


Fig. 2.



Soient (a, x), (b, y), (c, z) les trois sommets d'un triangle équilatéral inscrit. Une rotation de 120 degrés amène la figure de la position (1) à la position (2), c'est-à-dire donne à (a, x) la place de (c, z), à (c, z) la place de (b, y) et à (b, y) celle de (a, x).

Par cette permutation, les équations (1) deviennent

$$by + cz + ax = k,$$
$$b'y + c'z + a'x = k',$$
$$b''y + c''z + a''x = k''.$$

Elles ne changent donc pas; les valeurs des inconnues ne doivent donc pas être altérées; mais la permutation transforme la formule (3) en la suivante :

$$y = \frac{ak'c'' - a'c'k'' + ca'k'' - ka'c'' + kc'a'' - ck'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

En faisant tourner la *fig.* 2 de 120 degrés dans le même sens, ce qui revient à faire décrire 240 degrés à la *fig.* 1, on trouve

$$z = \frac{ab'k'' - ak'b'' + ka'b'' - ba'k'' + bk'a'' - kb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

94. Le dénominateur est le même pour les trois inconnues. Voici la manière de le former : on prend les deux permutations ab et $-ba$ qui composent le dénominateur des équations à deux inconnues; dans chacune de ces permutations, on met le coefficient c successivement à toutes les places en commençant par la dernière, et l'on change le signe de cette permutation chaque fois que c avance d'un rang vers la gauche. Ainsi le terme ab fournit les permutations

$$+abc, \quad -acb, \quad +cab,$$

et le terme $-ba$ donne

$$-bac, \quad +bca, \quad -cba.$$

On ajoute alors tous ces monômes avec leurs signes, en affectant la seconde lettre de chaque terme d'un accent, et la troisième de deux accents. On obtient ainsi pour le dénominateur commun relatif à trois équations

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

Pour former le numérateur relatif à une inconnue, on remplace dans le dénominateur commun chacun des coefficients de cette inconnue par le second membre de l'équation correspondante.

DU SYMBOLE $\frac{m}{0}$.

95. Quand une équation donne pour x une valeur de la forme $\frac{m}{0}$, on dit souvent qu'elle a l'*infini* pour racine, et l'on remplace le symbole $\frac{m}{0}$ par le signe ∞. Voici la raison de cette locution incorrecte. Au lieu d'introduire brusquement l'hypothèse $m = 0$ dans la formule

$$x = \frac{m}{n},$$

donnons à n des valeurs de plus en plus petites ayant zéro pour limite, la valeur de x ira croissant et pourra surpasser toute grandeur assignable; c'est ce qu'on exprime en disant qu'elle devient

Digitized by Google

infinie. Mais en réalité, quand n prend la valeur 0, il n'y a pas de nombre qui, multiplié par 0, donne m; x cesse donc d'exister, et l'équation n'admet plus de solution.

DU SYMBOLE $\frac{0}{0}$.

96. Quand une équation donne pour x une valeur de la forme $\frac{0}{0}$, on dit que l'inconnue x est *indéterminée*; x peut en effet recevoir alors telle valeur qu'on voudra, parce qu'elle n'est assujettie qu'à la condition de donner un produit nul quand on la multiplie par zéro.

Néanmoins, il peut arriver que l'indétermination annoncée par le symbole $\frac{0}{0}$ ne soit qu'apparente; le numérateur et dénominateur de la valeur de x peuvent avoir un rapport déterminé, et s'annuler seulement à cause d'un facteur commun qu'une hypothèse particulière a réduit à zéro.

Supposons, par exemple, qu'une équation ait donné la formule

$$x = \frac{\alpha^4 - 1}{3(\alpha - 1)},$$

qui pour $\alpha = 1$ devient à $\frac{0}{0}$; cette formule peut s'écrire

$$x = \frac{1}{3}\frac{(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha - 1)}{\alpha - 1} = \frac{1}{3}(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1),$$

et l'on voit qu'au lieu d'être indéterminée pour $\alpha = 1$, x prend la valeur finie $\frac{4}{3}$. L'indétermination apparente tenait à l'existence du facteur commun $\alpha - 1$ que l'hypothèse particulière $\alpha = 1$ réduisait à zéro.

D'ailleurs, si, au lieu de faire brusquement $\alpha = 1$, on avait posé

$$\alpha = 1 + h,$$

en désignant par h une quantité décroissante et ayant zéro pour li-

Digitized by Google

mite, on aurait trouvé

$$x = \frac{(1+h)^4 - 1}{3h} = \frac{1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4 - 1}{3h},$$

ou

$$x = \frac{4 + 6h + 4h^2 + h^3}{3},$$

qui *à la limite*, pour $h = 0$, donne

$$x = \frac{4}{3}.$$

97. En général, soit une expression algébrique de la forme $\frac{M}{N}$, où M et N sont composés de telle façon qu'on voudra en $x, y, z, \ldots$, et qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots$. On posera

$$x = a + h, \quad y = b + ph, \quad z = c + qh, \ldots;$$

puis, après avoir substitué et réduit le plus possible en supprimant les facteurs communs, on fera $h = 0$: on obtiendra ainsi ce qu'on appelle la *vraie valeur* de l'expression $\frac{M}{N}$ pour $x = a$, $y = b$, $z = c, \ldots$. Cette vraie valeur sera d'ailleurs déterminée ou indéterminée, suivant qu'elle se trouvera indépendante des quantités arbitraires $p, q, \ldots$, ou qu'elle contiendra encore, toutes réductions faites, une ou plusieurs de ces quantités; il est, en effet, évident que dans ce dernier cas on pourra faire acquérir à l'expression toutes les valeurs possibles en disposant convenablement de p et de q.

Exemple. — Soient les fractions

$$\frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

qui [illegible] $= 0$, $\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$, se présentent l'une et l'autre

[illegible]ons

[illegible], $c' - a'\frac{c}{a} = a'qh$;

la première fraction devient

$$\frac{c(ap-a')}{a(ap-a')}=\frac{c}{a},$$

elle est donc bien déterminée.

La seconde, au contraire, prend la forme

$$\frac{aa'qh}{h(ap-a')}=\frac{aa'q}{ap-a'},$$

elle est donc indéterminée, puisqu'en choisissant convenablement p et q, on peut lui faire prendre telle valeur qu'on veut.

98. Lorsqu'on a, comme dans l'exercice qui précède, plusieurs hypothèses à faire, il faut les introduire à la fois; sans quoi, on pourrait faire disparaître une indétermination qui existe réellement. Nous prendrons pour exemple un problème bien connu :

Inscrire dans un rectangle de dimensions données a et b un rectangle semblable à un rectangle donné, c'est-à-dire dont les dimensions aient un rapport donné m.

x et $a-x$ étant les segments du côté a, et y et $b-y$ ceux du côté b, on trouve aisément

$$m=\frac{x}{b-y}=\frac{y}{a-x},$$

d'où

$$x=\frac{m(am-b)}{m^2-1},\quad y=\frac{m(mb-a)}{m^2-1}.$$

Lorsqu'on suppose $a=b$, et $m=1$, les deux rectangles deviennent des carrés, et le problème est évidemment indéterminé; car pour inscrire un carré dans un carré il suffit de diviser de la même manière, mais arbitrairement, les côtés du premier carré. Aussi les formules se présentent-elles sous la forme $\frac{0}{0}$, quand on y introduit simultanément les deux hypothèses; et si l'on cherche leur vraie valeur, en posant

$$b=a+h,\quad m=1+ph,$$

réduisant et faisant $h = 0$, on trouve les expressions

$$x = \frac{a-p}{2}, \quad y = \frac{a+p}{2},$$

que la présence de la quantité p rend réellement indéterminées.

Néanmoins, si l'on fait *d'abord* $a = b$, ce qui permet de supprimer le facteur commun $m - 1$, *puis* $m = 1$ dans les formules simplifiées

$$x = \frac{am}{m+1}, \quad y = \frac{am}{m+1},$$

on trouve la valeur déterminée

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2};$$

on fait donc disparaître ainsi une indétermination qui a lieu pourtant en réalité.

SYMBOLES $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

99. Deux quantités peuvent croître indéfiniment en conservant un rapport fini. Ainsi la fraction $\frac{a+x}{a^2-x^2}$ se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, lorsque x est infini, et pourtant l'égalité

$$\frac{a+x}{a^2-x^2} = \frac{a+x}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{a-x}$$

montre que cette fraction a pour limite zéro.

Quand une expression devient $\frac{\infty}{\infty}$ pour une valeur indéfiniment croissante d'une lettre x qu'elle renferme, on obtient souvent la vraie valeur en introduisant la condition $x = \infty$, après avoir divisé par une puissance convenable de x.

Exemple I. — La fraction

$$\frac{\sqrt[3]{x^6+6x^5+8x^4+9x+1}+\sqrt[4]{x^8+5x^7+9x^3+4}}{x-1+\sqrt{x^4+3x-15}}$$

se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, pour $x = \infty$; en divisant haut et bas par x^2, on obtient l'expression

$$\frac{\sqrt[3]{1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{9}{x^5} + \frac{1}{x^6}} + \sqrt[4]{1 + \frac{5}{x} + \frac{9}{x^5} + \frac{4}{x^8}}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{3}{x^3} - \frac{15}{x^4}}},$$

qui se réduit à 2 pour $x = \infty$.

Exemple II. — Soit la fraction générale

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + \ldots}{Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots},$$

dont les termes sont des expressions entières par rapport à x.

Si m est $> n$, en divisant par x^m, puis faisant $x = \infty$, on trouve a pour le numérateur et o pour le dénominateur, en sorte que la fraction est infinie.

Si $m = n$, en divisant par x^m, puis faisant $x = \infty$, on obtient pour vraie valeur la quantité $\frac{a}{A}$.

Enfin, si m est $< n$, en divisant par x^n, on trouve $\frac{o}{A}$ ou o pour la limite.

Ainsi la fraction

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 3} = \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{3}{x^2}},$$

vaut $\frac{3}{2}$ pour $x = \infty$.

100. En général, quand une fraction $\frac{P}{Q}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$ pour une certaine valeur de x, l'expression

$$\frac{1}{Q} : \frac{1}{P}$$

devient $\frac{0}{0}$ pour cette même valeur, et l'on est conduit à chercher la limite de cette dernière expression.

De même la recherche de la vraie valeur d'un produit $P.Q$ qui se présente sous la forme $\infty . 0$ peut être ramenée à celle du quotient $P : \frac{1}{Q}$ qui devient $\frac{0}{0}$.

101. Deux quantités peuvent croître indéfiniment en conservant une différence finie. Ainsi la différence $a + x - x$ est toujours égale à a quel que soit x.

Nous ne chercherons les vraies valeurs des expressions qui conduisent au symbole $\infty - \infty$, que dans le cas où ces expressions sont de la forme

$$\sqrt{M} - \sqrt{N},$$

M et N étant des polynômes entiers en x qui deviennent infinis pour une valeur infinie de x.

Cette différence multipliée et divisée par $\sqrt{M} + \sqrt{N}$ devient $\frac{M - N}{\sqrt{M} + \sqrt{N}}$; elle se présentera donc sous la forme $\frac{m}{\infty}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, suivant que $M - N$ sera indépendant de x ou contiendra encore x.

Exemple. $\sqrt{x^4 - 7x^3 + 2x + 1} - \sqrt{x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 4}$ est égale à $-\frac{3}{2}$ pour $x = \infty$.

DISCUSSION GÉNÉRALE DES FORMULES ALGÉBRIQUES.

102. La démonstration des formules du n° 90 suppose que a et $ab' - ba'$ soient différents de zéro.

En général, pour établir une formule algébrique, on est obligé de faire certaines restrictions, et rien ne prouve que lors de la mise en nombres, on puisse se fier aux valeurs fournies par la formule dans le cas d'une *hypothèse non permise*.

La présente discussion a pour objet de mettre en lumière le théorème suivant :

Toutes les fois qu'une formule algébrique donne, pour certaines hypothèses faites sur les coefficients, un résultat déterminé (ou infini), on peut être assuré que ce résultat est exact, c'est-à-dire que ce résultat est celui qu'on obtiendrait en traitant directement les équations primitives pour ce cas particulier.

Considérons, par exemple, la formule qui donne x. Cette formule

$$x = \frac{M}{N}$$

conduit à des résultats exacts tant qu'on attribue aux coefficients qui entrent dans la composition de M et de N des *valeurs permises;* pour une hypothèse non permise, elle ne peut prendre que l'une des trois formes

$$\frac{A}{B}, \quad \frac{A}{o}, \quad \frac{o}{o}.$$

Examinons successivement ces trois cas, en observant qu'une hypothèse non permise est toujours une hypothèse *isolée* à laquelle on peut arriver par une suite d'hypothèses permises qui s'en approchent de plus en plus.

Dans le premier cas, une hypothèse permise, voisine de l'hypothèse non permise, fournirait un résultat exact de la forme

$$\frac{A + \alpha}{B + \beta};$$

à mesure que l'on se rapproche de l'hypothèse non permise, les nombres α et β tendent vers zéro; et comme le résultat ne cesse pas de convenir, il conviendra encore à la limite, en sorte que la valeur $\frac{A}{B}$ est exacte.

Dans le second cas, une hypothèse permise, voisine de l'hypothèse non permise, fournirait un résultat exact de la forme

$$\frac{A + \alpha}{\beta};$$

à mesure qu'on se rapproche de l'hypothèse non permise, les

nombres α et β tendent vers zéro, et le résultat, ne cessant pas de convenir, est encore exact à la limite. En d'autres termes, $\frac{A}{0}$ est la valeur qu'on déduirait des équations primitives en les traitant pour le cas particulier que l'on considère; ce qui veut dire (95) que, toutes les fois que la formule donne un résultat de la forme $\frac{A}{0}$, les équations primitives sont impossibles.

Enfin, dans le dernier cas, une hypothèse permise, voisine de l'hypothèse non permise, ferait acquérir à x une valeur de la forme

$$\frac{\alpha}{\beta};$$

mais comme, à mesure qu'on se rapproche de l'hypothèse non permise, les nombres α et β, tout en se réduisant à zéro, peuvent conserver un rapport déterminé, il ne faut pas conclure à l'indétermination. On doit chercher, par l'artifice général du n° **97**, la vraie valeur de ce $\frac{0}{0}$, et cette vraie valeur, qu'elle soit finie, infinie ou indéterminée, satisfera aux équations primitives.

Ainsi, en résumé, toutes les fois qu'une formule algébrique donne pour certaines hypothèses faites sur les coefficients un résultat déterminé (ou infini), ce résultat conviendra aux équations primitives; dans le cas de $\frac{0}{0}$, il y aura de plus à chercher la vraie valeur comme il a été dit au n° **97**.

103. Appliquons ces considérations aux équations

$$(1) \qquad ax + by = c, \quad a'x + b'y = c',$$

qui donnent

$$(2) \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Supposons les coefficients a, b, a', b' différents de zéro. On a démontré au n° **90** que les formules (2) sont équivalentes aux équa-

tions (1), tant qu'on n'a pas $ab' - ba' = 0$. Examinons ce qui arrive dans le cas de cette hypothèse non permise.

Si l'un des numérateurs $cb' - bc'$, par exemple, est nul en même temps que $ab' - ba'$, l'autre numérateur s'annulera aussi. Car des relations

$$ab' - ba' = 0, \quad cb' - bc' = 0,$$

on déduit

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

et, par suite,

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \quad \text{ou} \quad ac' - ca' = 0.$$

Les valeurs de x et de y se présentant sous la forme $\frac{0}{0}$ et étant réellement indéterminées, les équations (1) doivent, d'après la théorie précédente, former un système indéterminé, c'est-à-dire rentrer l'un dans l'autre. Or c'est ce qu'il est facile de vérifier; car en multipliant la première équation par b' et la seconde par b, on obtient deux équations nouvelles

$$(3) \qquad ab'x + bb'y = cb', \quad ba'x + bb'y = bc',$$

qui sont identiques, puisqu'on a pour hypothèse $ab' = ba'$, $cb' = bc'$.

Si les numérateurs ne s'annulent pas avec $ab' - ba'$, x et y se présentent l'un et l'autre sous la forme $\frac{m}{0}$, et, d'après la théorie précédente, les équations (1) doivent être incompatibles; c'est ce qu'on voit en effet sur les équations (3) qui sont équivalentes aux relations (1), et dont les premiers membres sont les mêmes, puisque $ab' = ba'$, tandis que les seconds sont différents.

Parmi les divers cas que peut offrir la discussion des formules (2), lorsque l'on suppose que les coefficients a, b, a', b' peuvent s'annuler, le seul intéressant est celui où l'on a

$$b = 0, \quad b' = 0,$$

d'où résultent

$$ab' - ba' = 0, \quad cb' - bc' = 0;$$

il est remarquable qu'alors le second numérateur $ac' - ca'$ peut n'être pas nul en même temps que le premier; la valeur de x devient indéterminée, y est infinie, et les équations sont contradictoires. Enfin si l'on supposait à la fois $b = 0$, $b' = 0$, $ac' - ca' = 0$, on sait (97) que y est arbitraire, mais que x a une valeur déterminée $\frac{c}{a}$: les équations (1) conduisent au même résultat; elles ne contiennent plus y et elles se réduisent à $x = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$.

CONDITION D'IDENTITÉ DE DEUX POLYNOMES.

104. *Un polynôme entier et rationnel qui renferme une lettre arbitraire x, ne peut être nul que si les coefficients des diverses puissances de x sont nuls séparément.*

Le théorème est évident pour un polynôme du premier degré $A_0 x + A_1$; car en changeant x en αx, α étant un nombre différent de 1, on obtient un nouveau polynôme $A_0 \alpha x + A_1$ qui doit aussi être nul, quel que soit x; la différence $A_0(\alpha - 1)x$ doit donc être constamment nulle, ce qui exige $A_0 = 0$, et, par suite, en remontant, $A_1 = 0$.

Pour prouver que la proposition est générale, il reste à faire voir que si elle est vraie pour un polynôme de degré $n - 1$, elle subsiste pour un polynôme de degré n. Or soit

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

un polynôme de degré n; changeant x en αx, le nouveau polynôme

$$A_0 \alpha^n x^n + A_1 \alpha^{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \alpha x + A_n$$

devra être aussi nul, quel que soit x; il en sera donc de même de la différence

$$x\left[A_0(\alpha^n - 1)x^{n-1} + A_1(\alpha^{n-1} - 1)x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(\alpha - 1)\right],$$

ce qui exige, puisque la parenthèse est du degré $n - 1$, que les coefficients des diverses puissances de x dans cette parenthèse soient nuls séparément; on doit donc avoir, puisque α diffère

de 1,

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad \ldots, A_{n-1} = 0,$$

et, par suite, en remontant,

$$A_n = 0.$$

105. *Pour que deux polynômes entiers et rationnels qui renferment une lettre arbitraire x soient égaux*, il faut que leur différence soit constamment nulle, c'est-à-dire, d'après le théorème précédent, que les coefficients des diverses puissances de x dans cette différence soient nuls séparément; ou enfin, puisque les termes de cette différence sont les différences des termes correspondants des deux polynômes proposés, *il faut que ces deux polynômes soient composés identiquement des mêmes termes.*

On peut même dire, en général, *que deux polynômes entiers et rationnels qui renferment un nombre quelconque de lettres arbitraires et indépendantes les unes des autres, ne peuvent être égaux que s'ils sont composés identiquement des mêmes termes.* Il suffit de montrer que si la proposition est vraie pour deux polynômes renfermant $n-1$ lettres arbitraires, elle le sera encore pour deux polynômes en contenant n. Or soient deux polynômes contenant $n+1$ lettres arbitraires $x, y, z, \ldots, t$; après qu'on les aura ordonnés par rapport à x, ils auront la forme

$$(1) \quad A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p, \quad B_0 x^q + B_1 x^{q-1} + \ldots + B_q,$$

$A_0, A_1, \ldots, A_p, B_0, \ldots, B_q$ étant des polynômes renfermant les $n-1$ variables $y, z, \ldots, t$; les polynômes (1) étant égaux, quel que soit x, on doit avoir

$$(2) \qquad p = q, \quad A_0 = B_0, \quad A_1 = B_1, \ldots, A_p = B_q;$$

mais ces polynômes (2) étant égaux et ne renfermant que $n-1$ variables, doivent être respectivement composés des mêmes termes; et, par suite, il doit en être de même des polynômes proposés.

APPLICATIONS DU THÉORÈME PRÉCÉDENT.

106. La proposition qui précède sert à vérifier l'exactitude d'une relation algébrique donnée.

Digitized by Google

Pour vérifier une relation $V = 0$ entre m variables liées entre elles par $m - n$ équations, on déduit de ces équations les valeurs de $m - n$ variables en fonction des n autres; il faut ensuite que la substitution de ces valeurs dans $V = 0$ réduise cette équation à une identité; l'identité deviendra manifeste après l'évanouissement des dénominateurs et des radicaux.

Proposons-nous, par exemple, de vérifier que

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)},$$

si l'on a

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}.$$

De ces relations on déduit

$$B = b\frac{A}{a}, \quad C = c\frac{A}{a}, \quad D = d\frac{A}{a},$$

et en portant dans la première, on obtient

$$\sqrt{\frac{A}{a}a^2} + \sqrt{\frac{A}{a}b^2} + \sqrt{\frac{A}{a}c^2} + \sqrt{\frac{A}{a}d^2} + \sqrt{\frac{A}{a}(a+b+c+d)^2},$$

ou

$$\sqrt{\frac{A}{a}}(a+b+c+d) = \sqrt{\frac{A}{a}}(a+b+c+d).$$

107. Voici un autre usage du même théorème.

Lorsqu'un polynôme inconnu et ordonné par rapport à une lettre donnée doit satisfaire à certaines conditions, on l'écrit en laissant indéterminés ses coefficients et même son degré s'il y a lieu; puis on détermine ces coefficients et ce degré en exprimant que le polynôme jouit des propriétés particulières dont il s'agit. Nous allons éclaircir ces généralités par des exemples.

Exemple I. — *Trouver la condition pour que le trinôme $ax^2 + bx + c$ soit un carré parfait.*

Il faut identifier cette expression avec le carré d'un binôme $\alpha x + \beta$, c'est-à-dire avec

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2;$$

on obtient ainsi les relations

$$\alpha^2 = a, \quad 2\alpha\beta = b, \quad \beta^2 = c.$$

Les deux dernières donnent

$$\alpha = \sqrt{a}, \quad \beta = \sqrt{c},$$

et en portant dans l'égalité intermédiaire, on trouve

$$2\sqrt{ac} = b, \quad \text{ou} \quad b^2 - 4ac = 0,$$

c'est la condition cherchée ; le trinôme est alors le carré de

$$x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

108. Exemple II. — *Trouver le reste de la division d'un polynôme par $x - a$, et la forme du quotient.*

Soit le polynôme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_n x^{m-n} + \ldots + A_{m-1} x + A_m.$$

Le diviseur étant du premier degré, le quotient sera un polynôme de degré $m - 1$, tel que

$$B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \ldots + B_n x^{m-n} + \ldots + B_{m-1} x + B_m,$$

et le reste qui a pour expression

$$\begin{aligned} &A x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_n x^{m-n} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \\ &-(x-a)(B_1 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \ldots + B_n x^{m-n} + \ldots + B_{m-1} x + B_m), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l} A_0 & x^m + A_1 & x^{m-1} + A_1 & x^{m-3} + \ldots + A_n & x^{m-n} + \ldots + A_{m-1} & x + A_m \\ -B_1 & \quad + a B_1 & \quad + a B_2 & \quad + a B_n & \quad + a B_{m-1} & \quad + a B_m \\ & \quad - B_2 & \quad - B_3 & \quad - B_{n-1} & \quad - B_m & \end{array}$$

sera de degré zéro. Nous aurons donc l'expression de ce reste en égalant à zéro les coefficients de $x, x^2, \ldots, x^m$, tirant la valeur de B_m des équations ainsi obtenues, et portant cette valeur dans $A_m + a B_m$.

Digitized by Google

En annulant les coefficients de x, $x^2, \ldots, x^m$, on trouve

$$(1)\quad \begin{cases} A_0 = B_1, \quad A_1 + aB_1 = B_2, \quad A_2 + aB_2 = B_3, \ldots, \\ A_n + aB_n = B_{n+1}, \ldots, A_{m-1} + aB_{m-1} = B_m. \end{cases}$$

Multipliant la première équation par a^m, la seconde par $a^{m-1}, \ldots$, la dernière par a, et ajoutant, il vient

$$A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_n a^{m-n} + \ldots + A_{m-1} a = aB_m.$$

Le reste $A_m + aB_m$ prend donc la forme

$$A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + \ldots + A_n a^{m-n} + \ldots + A_{m-1} a + A_m;$$

c'est-à-dire qu'*il est égal au résultat de la substitution de a à x dans le dividende*. C'est une autre démonstration du théorème (88).

Les équations (1) montrent que l'*on obtient un coefficient quelconque du quotient en multipliant le coefficient précédent par a et ajoutant le coefficient du terme de même rang dans le dividende*. L'application de cette loi au dividende $x^m \pm a^m$ reproduit les formules du n° 86.

EXERCICES.

I. Conditions pour que les fractions

$$\frac{Ax + B}{A'x + B'}, \quad \frac{Ax^2 + Bx + C}{A'x^2 + B'x + C'},$$

aient des valeurs indépendantes de x.

II. Conditions pour que les fractions

$$\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'}, \quad \frac{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}{A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x\, E'y + F'},$$

soient indépendantes de x et de y.

III. Soient v et x des quantités dépendantes l'une de l'autre, de façon que pour $x = a, a', a''$, on ait

$$v = b, b', b'';$$

exprimer v par un polynôme en x, de manière à remplir ces conditions.

IV. Exprimer v par un polynôme en x et y, de façon que les valeurs correspondantes de v, x, y soient c, a, b; c', a', b'; c'', a'', b'', etc. Ces problèmes se présentent souvent dans les mathématiques appliquées.

V. Déterminer les constantes a, b, c par la condition que les expressions

$$ax + bx^2, \qquad ax + bx^2 + cx^3,$$

représentent, la première la somme des carrés, et la seconde la somme des cubes des x premiers nombres de la suite naturelle.

VI. Vérifier qu'un tronc de cône droit à bases parallèles équivaut à la somme d'un cône et d'un cylindre droits de même hauteur que le tronc, et dont les bases ont respectivement pour rayons la demi-somme et la demi-différence des rayons des bases du tronc.

En Angleterre, on emploie pour le jaugeage des tonneaux la formule d'Oughtred

$$V = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 + r^2);$$

et en France on se sert de la formule de Dez

$$V = \pi H\left[R - \frac{3}{8}(R - r)\right]^2.$$

Quelle est celle des deux formules qui donne le plus grand volume?

VII. Éliminer a, b, c entre les équations

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

$$\frac{x^m}{a^{m+n}} = \frac{y^m}{b^{m+n}} = \frac{z^m}{c^{m+n}},$$

$$a^n + b^n + c^n = d^n.$$

Digitized by Google

VIII. Résoudre le système

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = a_1,\\
&x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 = a_2,\\
&x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \ldots + nx_2 = a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} = a_n.
\end{aligned}$$

IX. Les relations

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, & \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,\\
\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, & \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= 0,\\
\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0,
\end{aligned}$$

entraînent

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0,\\
\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1, & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' &= 0,\\
\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0,
\end{aligned}$$

$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 + \beta^2\beta'^2\beta''^2 + \gamma^2\gamma'^2\gamma''^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha'^2\beta'^2\gamma'^2 + \alpha''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

Digitized by Google

CHAPITRE IX.

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ.

OBJET DE CE CHAPITRE.

109. La résolution d'un problème comprend trois parties distinctes :

1°. La *mise en équation*, c'est-à-dire la traduction algébrique des relations que l'énoncé établit entre les données et les inconnues;

2°. La *résolution des équations* ainsi trouvées;

3°. La *discussion*, c'est-à-dire la recherche des valeurs limites des données en dehors desquelles le problème cesse d'être possible, et l'examen des valeurs intermédiaires de ces données pour lesquelles les inconnues se présentent sous une forme remarquable.

La résolution des équations ayant été traitée avec détail dans les trois chapitres précédents, nous ne parlerons ici que de la mise en équation et de la discussion des problèmes.

MISE EN ÉQUATION.

110. On ne peut formuler d'une manière précise la marche à suivre pour mettre un problème en équation. Tout ce qu'on peut dire de plus général, c'est qu'il faut *indiquer sur les lettres qui représentent les inconnues et sur les données, les opérations que l'on effectuerait si, après avoir trouvé la valeur des inconnues, on se proposait de vérifier que ces valeurs satisfont aux conditions énoncées.*

Exemple I. — *Une paysanne, chargée de vendre des œufs au marché, vend à une première personne la moitié de ses œufs, plus la moitié d'un œuf; à une seconde personne, la moitié des œufs qui lui restent, plus la moitié d'un œuf, etc.; enfin à une* $n^{\text{ième}}$ *personne, la moitié des œufs qui lui restent, plus la moitié d'un*

œuf. Elle a alors vendu tous ses œufs: combien en avait-elle en arrivant au marché?

Soit x le nombre cherché. La paysanne vend d'abord

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$$

œufs; il ne lui en reste donc que

$$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{x-1}{2}.$$

Elle vend alors à la seconde personne un nombre d'œufs marqué par

$$\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2};$$

elle n'en a donc plus que

$$\frac{x-1}{2}-\left(\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{x-1}{4}-\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x-3}{4}.$$

La troisième vente est de

$$\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}$$

œufs; et le reste

$$\frac{x-3}{4}-\left(\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{x-3}{8}-\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x-7}{8}.$$

La loi des restes

$$\frac{x-1}{2}, \quad \frac{x-3}{4}, \quad \frac{x-7}{8}, \ldots,$$

ou

$$\frac{x-(2-1)}{2}, \quad \frac{x-(2^2-1)}{2^2}, \quad \frac{x-(2^3-1)}{2^3}, \ldots,$$

montre que, après n ventes, la paysanne n'a plus qu'un nombre d'œufs égal à $\frac{1}{2^n}[x-(2^n-1)$; en sorte que l'équation du problème est

$$\frac{x-(2^n-1)}{2^n}=0, \quad \text{d'où} \quad x=2^n-1.$$

111. Exemple II. — *On forme un alliage de deux métaux dont les poids spécifiques (poids de l'unité de volume) sont ρ et ρ'; on prend à cet effet p kilogrammes du premier métal et p' du second : le volume total subit une contraction de $\frac{1}{\delta}$ par unité. Quel est le poids spécifique x de cet alliage ?*

Le poids total de l'alliage est $p + p'$; son volume est donc

$$\frac{p+p'}{x}.$$

D'ailleurs les volumes des métaux étant $\frac{p}{\rho}$, $\frac{p'}{\rho'}$, la somme de ces valeurs sera

$$\frac{p}{\rho} + \frac{p'}{\rho'},$$

et la contraction

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{p'}{\rho'}\right)\frac{1}{\delta};$$

en sorte que le volume de l'alliage peut encore s'écrire

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{p'}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{p}{\delta}\right);$$

on a donc

$$x = \frac{p+p'}{\left(\frac{p}{\rho} + \frac{p'}{\rho'}\right)\left(1 - \frac{p}{\delta}\right)}.$$

Lorsque les métaux s'allient sans contraction, on a

$$x = \frac{p+p'}{\frac{p}{\rho} + \frac{p'}{\rho'}}.$$

Cette dernière formule permet de trouver p et p', lorsqu'on connaît x, ρ, ρ' et $p + p'$; on retombe ainsi sur le problème fameux de la couronne d'Hiéron.

112. Exemple III. — *Un train dont la vitesse est v part après un autre train dont la vitesse est v', et le retard est calculé de façon qu'ils arrivent en même temps à la destination. Mais le premier*

train est obligé de ralentir sa vitesse de moitié après avoir fait les $\frac{2}{3}$ *de sa course, en sorte qu'il y a rencontre des trains a lieues avant la fin du voyage. Quelle est la longueur totale* x *du trajet ?*

Si le premier train n'éprouvait pas d'accident, il mettrait un temps $\frac{x}{v}$ pour faire le trajet; le second train fait ce même trajet dans le temps $\frac{x}{v'}$; le retard calculé est donc

$$\frac{x}{v} - \frac{x}{v'},$$

et en lui ajoutant le temps nécessaire au second train $\frac{x-a}{v'}$ pour arriver à l'endroit de la rencontre, on a le temps

$$\frac{x}{v} - \frac{x}{v'} + \frac{x-a}{v'} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{v} - \frac{a}{v'},$$

après lequel la rencontre a lieu. D'ailleurs ce temps est égal à celui

$$\frac{2}{3}\frac{x}{v}$$

après lequel le premier train ralentit sa vitesse, augmenté de celui

$$\frac{\frac{x}{3} - a}{\frac{v}{2}},$$

qui s'écoule entre le ralentissement et la rencontre. On a donc l'équation

$$\frac{x}{v} - \frac{a}{v'} = \frac{2}{3}\frac{x}{v} + \frac{\frac{x}{3} - a}{\frac{v}{2}},$$

d'où

$$x = 3a\left(2 - \frac{v}{v'}\right).$$

113 Exemple IV. — *Trois joueurs conviennent qu'à chaque*

partie le perdant doublera l'argent des deux autres ; ils perdent chacun une partie, puis ils se retirent avec 120 *francs chacun. Quelles étaient les mises x, y, z?*

En admettant que le joueur x perde la première partie, le joueur y la seconde, et le joueur z la troisième, on voit que l'état des fortunes est successivement

$x-y-z$,	$2y$	$2z$ après la première partie.
$2x-2y-2z$,	$3y-z-x$,	$4z$ après la seconde,
$4x-4y-4z$,	$6y-2z-2x$,	$7z-y-x$ après la dernière.

En égalant chacune de ces expressions à 120, on obtient les trois équations

$$4x-4y-4z=120,$$
$$6y-2z-2x=120,$$
$$7z-y-x=120,$$

d'où

$$x=195, \qquad y=105, \qquad z=60.$$

Si l'on remarque que la somme totale possédée à chaque instant par les trois joueurs reste toujours égale à la somme des mises, on voit que la somme des premiers membres des trois équations précédentes doit faire

$$x+y+z.$$

On est donc conduit à faire cette somme et à substituer à l'une quelconque des équations du système primitif la relation plus simple

$$x+y+z=360,$$

qu'il suffit d'ajouter successivement à chacune des proposées, après l'avoir multipliée par 4, 2, 1, pour avoir les valeurs de x, y, z.

L'emploi de cette quantité auxiliaire, la somme des mises, permet de résoudre plus simplement le problème proposé. Pour le montrer, reprenons la question étendue à un nombre quelconque de joueurs :

n joueurs conviennent qu'à chaque partie le perdant doublera l'argent des autres. Après n parties perdues successivement par

chacun d'eux, ils se retirent avec des sommes respectivement égales à $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Quelles étaient les mises $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$?

Soit x_k la mise du $k^{ième}$ joueur, c'est-à-dire de celui qui perd la $k^{ième}$ partie et se retire avec a_k.

Après la première partie, ce joueur possède

$$2^1 x_k,$$

après la seconde

$$2^2 x_k,$$

après la troisième

$$2^3 x_k,$$

et après la $k-1^{ième}$

$$2^{k-1} x_k.$$

La somme totale possédée par les $n-1$ autres joueurs est alors

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) - 2^{k-1} x_k,$$

puisque l'argent qui est au jeu, c'est-à-dire le fonds de roulement, est à tout instant

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Le $k^{ième}$ joueur en perdant la $k^{ième}$ partie donne donc

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - 2^{k-1} x_k,$$

et il ne lui reste après cette partie que

$$2^{k-1} x_k - [(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - 2^{k-1} x_k]$$

ou

$$2^k x_k - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Dès lors il double son avoir à chaque coup, jusqu'à la fin, et comme il y a encore $n-k$ parties à faire, sa fortune est multipliée par 2^{n-k}, et il se retire avec

$$2^n x_k - 2^{n-k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

En écrivant que cette expression est égale à a_k, on obtient l'équation

$$2^n x_k - 2^{n-k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = a_k,$$

d'où l'on tire

$$x_k = \frac{a_k + 2^{n-k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{2^n}$$

ou

$$x_k = \frac{a_k}{2^n} + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2^k}.$$

Si l'on fait dans cette formule $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, on obtient successivement les mises des divers joueurs.

INCONNUES AUXILIAIRES.

114. On n'aperçoit pas toujours aisément les relations que l'énoncé établit entre les données et les inconnues ; il faut alors avoir recours à des *inconnues auxiliaires*, qui dépendent plus immédiatement des données et dont les relations avec les inconnues véritables soient faciles à saisir. On élimine ensuite entre les équations trouvées ces quantités auxiliaires qui ont servi, en quelque sorte, de pont pour passer des données aux résultats.

L'exemple suivant est extrait de l'*Arithmétique universelle de Newton :*

Soient S, S′, S″ *les surfaces de trois prés, dans lesquels l'herbe est d'égale hauteur et croît d'un mouvement uniforme. Le premier pré a nourri n bœufs pendant t jours ; le second n′ bœufs pendant t′ jours ; on demande combien de bœufs le troisième pré pourra nourrir pendant t″ jours ?*

Désignons par x ce nombre de bœufs ; et prenons trois inconnues auxiliaires, à savoir :

La hauteur commune h de l'herbe dans les trois prés à l'époque où l'on y met les bœufs ;

La vitesse v avec laquelle l'herbe pousse ;

La quantité d'herbe q que chaque bœuf mange par jour, en prenant pour unité la quantité d'herbe par mètre carré de terrain et par mètre de haut.

Le premier troupeau a mangé une quantité d'herbe exprimée par

$$nqt,$$

et qui se compose de l'herbe Sh qui existait dans le pré avant l'entrée des bœufs, et de l'herbe Svt qui a poussé pendant leur séjour. On a donc

$$(1) \qquad nqt = \mathrm{S}\,(h + vt).$$

Les deux autres prés fournissent les relations analogues

$$(2) \qquad n'qt' = S'(h + vt'),$$

$$(3) \qquad xqt'' = S''(h + vt'').$$

En portant dans (3) les valeurs de h et de v tirées de (1) et (2), la lettre q disparaît d'elle-même et l'on trouve

$$x = \frac{S''}{SS'} \frac{Sn't'(t'' - t) + S'nt(t' - t'')}{t' - t}.$$

APPLICATION NUMÉRIQUE.

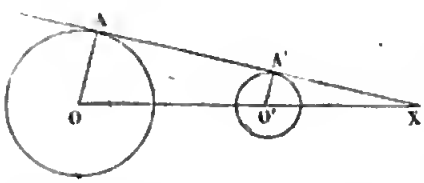
$S = 3\frac{1}{2}$ arpents..	$S' = 10$,	$S'' = 24$,
$n = 12$ bœufs....	$n' = 21$,	$x = 36$,
$t = 3$ semaines...	$t' = 9$,	$t'' = 18$.

DE L'INFINI COMME SOLUTION.

115. On sait que lorsqu'une formule donne une valeur infinie pour une inconnue, par suite de certaines valeurs particulières attribuées aux données, l'équation est impossible; mais il n'en est pas toujours ainsi du problème qui a conduit à cette équation. En effet, le symbole $\frac{m}{0}$ exprime (95) que l'inconnue croît au delà de toute limite à mesure que les données tendent vers certaines valeurs; or il arrive souvent, en géométrie, que cet état limite de l'inconnue, qui cesse alors d'exister, correspond à une construction déterminée.

Soit, par exemple, *proposé de mener une tangente commune à deux circonférences de rayons r et r'.*

Fig. 3.



O, O' étant les centres, A et A' les points de contact, et X l'intersection de la tangente avec la ligne des centres; prenons pour inconnue la distance $OX = x$ du point X au centre O du premier cercle : les triangles rectangles semblables OAX,

O′A′X donnent

$$\frac{x}{x-d}=\frac{r}{r'}, \quad \text{d'où} \quad x=\frac{dr}{r-r'},$$

où d désigne la distance OO′ des centres.

A mesure que la différence $r-r'$ diminue, x augmente et le point X s'éloigne. *Quand les deux cercles sont égaux*, x devient ∞, et *la tangente devient parallèle à la ligne des centres.*

De même, quand pour déterminer un angle on a pris pour inconnue sa tangente trigonométrique, une solution infinie indique que l'angle est droit.

PROBLÈMES INDÉTERMINÉS.

116. Lorsque, en résolvant un problème, on trouve pour l'inconnue ou pour les inconnues des valeurs de la forme $\frac{0}{0}$, il y a souvent indétermination complète; mais quelquefois l'indétermination n'est qu'apparente, elle tient seulement à la présence d'un facteur qui, devenant nul pour certaines hypothèses, réduit à zéro les deux termes de la fraction.

Exemple I. — *Avec deux vins qui coûtent a et b le litre, former m litres d'un mélange dont le litre coûte c.*

Soient x et y les quantités des deux vins qu'il faut mélanger; on a évidemment les relations

$$x+y=m,$$
$$ax+by=cm,$$

d'où

$$x=m\frac{c-b}{a-b}, \quad y=m\frac{a-c}{a-b}.$$

Pour $a=b=c$, ces formules deviennent

$$x=\frac{0}{0} \quad \text{et} \quad y=\frac{0}{0},$$

et d'ailleurs les équations se réduisent à la condition unique

$$x+y=m.$$

Il y a donc indétermination; on le voit du reste à priori, en re-

marquant que les deux vins primitifs ayant le même prix, en les mélangeant en proportion quelconque, on aura toujours un vin de ce prix.

Exemple II. — *Trouver le volume d'un tronc de pyramide, connaissant ses bases* B^2 *et* b^2 *et sa hauteur* h.

Désignons par x la hauteur de la petite pyramide qu'il faut ajouter au tronc pour avoir la pyramide entière.

Le volume de la petite pyramide est

$$\frac{1}{3} b^2 x,$$

celui de la grande

$$\frac{1}{3} B^2 (h + x),$$

et, par suite, le volume du tronc a pour expression

$$\frac{1}{3} [B^2 (h + x) - b^2 x].$$

Or, dans une pyramide, les sections parallèles sont entre elles comme les carrés de leurs distances au sommet; on a donc

$$\frac{B^2}{b^2} = \frac{(h + x)^2}{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{B}{b} = \frac{h + x}{x},$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{bh}{B - b} \quad \text{et} \quad h + x = \frac{Bh}{B - b};$$

le volume du tronc prend donc la forme

$$(1) \qquad \frac{h}{3} \frac{B^3 - b^3}{B - b}.$$

Cette expression devient $\frac{0}{0}$ pour $B = b$; mais l'indétermination n'est qu'apparente, car, dans ce cas, la pyramide dégénère en un prisme de base B^2 et de hauteur h, lequel a un volume déterminé hB^2. On voit, en effet, que c'est le facteur commun $B - b$ qui a réduit la formule (1) à la forme $\frac{0}{0}$; en supprimant

ce facteur, on trouve pour le volume du tronc l'expression connue

$$\frac{h}{3}(B^2 + b^2 + Bb),$$

qui, pour $B = b$, se réduit bien à

$$hB^2.$$

DES SOLUTIONS NÉGATIVES.

117. Théorème. — *Les solutions négatives d'un système d'équations du premier degré, prises positivement, satisfont à un système qu'on déduit du premier par le changement des signes des termes qui contiennent les inconnues dont les valeurs sont négatives.*

En effet, si

$$x = \alpha, \quad y = -\beta, \quad z = -\gamma,$$

satisfont au système

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k, \\ a'x + b'y + c'z &= k', \\ a''x + b''y + c''z &= k'', \end{aligned}$$

on a les relations

$$\begin{aligned} a\alpha - b\beta - c\gamma &= k, \\ a'\alpha - b'\beta - c'\gamma &= k', \\ a''\alpha - b''\beta - c''\gamma &= k'', \end{aligned}$$

qui expriment que

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma,$$

conviennent au système

$$\begin{aligned} ax - by - cz &= k, \\ a'x - b'y - c'z &= k', \\ a''x - b''y - c''z &= k''; \end{aligned}$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

118. Supposons qu'un problème ait conduit à des équations qui admettent un système de valeurs dont quelques-unes sont né-

gatives ; en changeant dans ces équations les signes des termes qui renferment les inconnues dont les valeurs sont négatives, on aura un nouveau système d'équations dont les racines seront les solutions du système précédent prises positivement. Si donc, en réfléchissant sur la mise en équation du problème proposé, on peut modifier l'énoncé, ou le généraliser de façon que sa traduction algébrique mène aux nouvelles équations, on aura utilisé les solutions négatives, ou, comme on dit, on les aura interprétées.

Éclaircissons ces généralités par des exemples :

Exemple I. — *Les âges de deux personnes sont n et n' ; dans combien de temps l'âge de la première personne sera-t-il le double de l'âge de la seconde ?*

A la fin de ce temps x, compté à partir de l'époque actuelle, l'âge de la première personne sera

$$n + x;$$

celui de la seconde

$$n' + x,$$

et l'on aura, d'après l'énoncé,

$$(1) \qquad n' + x = 2(n + x),$$

d'où

$$x = n' - 2n.$$

Quand n' est $< 2n$, la valeur de x est négative, et le problème, tel qu'il est posé, est impossible.

Changeons x en $-x$ dans l'équation (1) ; la nouvelle équation

$$(2) \qquad n' - x = 2(n - x)$$

admet (117) la solution positive

$$x = 2n - n';$$

et on voit aisément que cette équation répond à la question suivante :

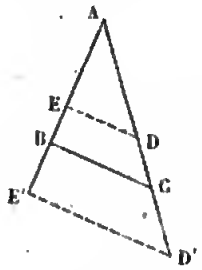
A quelle époque l'âge de la seconde personne a-t-il été le double de l'âge de la première ?

119. Exemple II. — *Mener parallèlement à la base d'un triangle une droite terminée aux deux côtés et égale à une droite donnée m.*

Digitized by Google

Supposons le problème résolu : soient ABC le triangle proposé, BC sa base, DE la parallèle demandée, a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C, et x la distance inconnue CD. Les triangles semblables ABC, ADE donnent

Fig. 4.



$$(1) \qquad \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \quad \text{ou} \quad \frac{b-x}{b} = \frac{m}{a}$$

et

$$x = \frac{b(a-m)}{a}.$$

Quand a est $< m$, la valeur de x est négative. Pour l'interpréter, on change x en $-x$ dans la relation (1), et l'on obtient une nouvelle équation

$$(2) \qquad \frac{b+x}{b} = \frac{m}{a},$$

qui admet (117) la solution positive

$$x = \frac{b(m-a)}{a};$$

or l'équation (2) est précisément celle qu'on obtient en supposant le point D au-dessous de C ; la distance au point C, représentée par la valeur négative, doit donc être comptée dans un sens *contraire* à celui qu'on avait supposé dans la mise en équation.

120. Lorsque l'inconnue est une grandeur rapportée à une origine fixe et susceptible de deux sens contraires de part et d'autre de cette origine, une valeur négative indique le plus souvent un changement de sens. Ainsi, comme on l'a vu dans les exemples qui précèdent, une valeur négative trouvée pour un temps à venir indique un temps passé, et une longueur négative doit être comptée à partir de l'origine dans la direction inverse de celle qu'on avait supposée lors de la mise en équation. Ce fait n'est pourtant pas général ; et avant de conclure qu'une solution négative indique un changement de direction, il faut s'assurer si ce changement de sens n'entraîne dans les équations que le changement du signe de chacun des termes qui renferment l'inconnue

Digitized by Google

négative. L'habitude du calcul permet de faire instantanément cette vérification; mais en s'en dispensant complétement, on risquerait de se tromper.

Voici quelques exemples :

10 *pierres sont rangées en ligne droite à* 1 *mètre de distance les unes des autres. Déterminer sur cette droite un point* X *tel, qu'il y ait n fois plus de chemin à faire pour transporter successivement chaque pierre au point* X *que pour les transporter à la place occupée par la première pierre. On suppose que l'on parte dans les deux cas de la première pierre.*

Supposons le point X situé à une distance x de la dernière pierre et à droite. Pour rassembler les pierres au point 1, on fera un chemin égal à

$$2(1+2+3+\ldots+9).$$

Pour les transporter en X, il faudra parcourir un espace total exprimé par

$$9+x+2(8+x)+2(7+x)+2(6+x)+\ldots+2x,$$

en sorte que l'équation du problème est

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} 2n(1+2+3+\ldots+9) \\ =9+x+2(\overline{8+x}+\overline{7+x}+\overline{6+x}+\ldots+\overline{1+x}+x), \end{array}\right.$$

ou

$$90n=19x+81,$$

d'où

$$x=\frac{90n-81}{19}.$$

Lorsqu'on a

$$90n<81 \quad \text{ou} \quad n<\frac{9}{10},$$

la valeur de x est négative; elle n'indique pourtant pas un changement de direction : car si l'on met le problème en équation, en supposant X situé à gauche du point 10, entre 3 et 4 par exemple, on obtient la relation

$$\begin{array}{l} 2n(1+2+3+\ldots+9) \\ =9-x+2(\overline{8-x}+\overline{7-x}+\overline{x-6}+\overline{x-5}+\overline{x-3}+\ldots+x), \end{array}$$

qui diffère, il est vrai, de la première, mais n'est pas égale à la transformée de (1) en $-x$.

121. Le problème du n° **116** est un exemple du cas où l'impossibilité de l'interprétation de la solution négative tient à ce que l'inconnue n'est pas susceptible de deux sens opposés.

La nature de cette question exige évidemment que x et y soient des nombres positifs. Or on peut toujours supposer $a < b$, c'est-à-dire appeler premier vin le vin le plus cher; dès lors pour que x et y soient positifs, c'est-à-dire pour que la question soit possible, il faut que l'on ait à la fois

$$b < c < a;$$

on voit d'ailleurs à priori que la question ne peut, en effet, admettre de solution qu'autant que le prix du mélange est intermédiaire entre le prix des deux vins.

Dans ce cas, l'impossibilité manifestée par une valeur négative est de la même nature que celle qui est indiquée quelquefois par une solution fractionnaire. Ainsi, *quand on demande de payer* 40 *francs avec* 13 *pièces, dont* x *de* 2 *francs et* $13 - x$ *de* 5 *francs,* on trouve

$$2x + 5(13 - x) = 40, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{25}{3}.$$

C'est donc ici une valeur fractionnaire qui annonce l'impossibilité du problème.

INTRODUCTION DES NOMBRES NÉGATIFS DANS L'ÉNONCÉ D'UN PROBLÈME.

122. L'introduction de nombres négatifs dans les données d'un problème permet de réduire à une seule les formules qui correspondent aux différents cas de la question.

Les données sont souvent des grandeurs susceptibles d'être prises dans deux sens opposés. Ainsi, sur la droite indéfinie xy, il existe deux points B et B′ situés à une distance $0^m,05$ d'un point donné A′; l'un est à droite de A

Fig. 5.

et l'autre à gauche. Au lieu d'écrire

$$AB = 0^m,05 \quad \text{à droite de A},$$
$$AB' = 0^m,05 \quad \text{à gauche de A},$$

affectons le nombre $0^m,05$, du signe + dans un cas, et du signe — dans l'autre.

Nous allons voir que ces conventions sont forcées, si l'on veut généraliser les formules.

Soient M et M′ deux points situés d'un même côté du point fixe O sur la droite indéfinie xy; si l'on représente par les nombres m et m' leurs distances au point O, la distance MM′ aura évidemment pour expression

Fig. 6.

$$m' - m;$$

mais si l'on veut que cette expression désigne *toujours* la distance des points M et M′, quelles que soient leurs positions sur la droite indéfinie, il faut forcément donner le signe — aux nombres qui mesurent les distances portées à gauche de O, et le signe + aux nombres qui représentent les distances comptées à droite, car si M vient en M″, la condition

$$m' - m = M'M'' = OM' + OM''$$

exige impérieusement qu'on ait

$$-m = OM'' \quad \text{ou} \quad m = -OM'',$$

puisqu'on a déjà

$$m' = OM'.$$

123. Ces considérations ne s'appliquent pas exclusivement aux longueurs; la température au-dessus ou au-dessous de zéro, l'actif ou le passif d'un négociant, le gain ou la perte d'un joueur, peuvent aussi être représentés par des nombres positifs ou négatifs.

Exemple :

La température d'un thermomètre varie de v degrés par heure; elle est actuellement de n degrés; déterminer la température x à une époque donnée t.

1°. Je suppose d'abord que la température aille en croissant

avec le temps, et que la température actuelle n soit au-dessus de zéro. Il peut alors se présenter trois cas, suivant que l'extrémité de la colonne liquide se trouve à l'époque t au-dessus de n, entre n et zéro, ou au-dessous de zéro.

Fig. 7. Dans le premier cas, on a évidemment

$$(1) \qquad x = n + vt.$$

Dans le second, t doit se rapporter nécessairement au temps passé, et l'on a

$$(2) \qquad x + vt = n \quad \text{ou} \quad x = n - vt.$$

Enfin, quand l'extrémité de la colonne liquide est au-dessous du point zéro, on a

$$\mathrm{MO} + \mathrm{ON} = \mathrm{MN},$$

ou

$$(3) \qquad x + n = vt \quad \text{et} \quad x = vt - n.$$

Les formules (1), (2) et (3) peuvent s'écrire

$$x = n + vt,$$
$$x = n + v(-t),$$
$$(-x) = n + v(-t).$$

Elles rentrent donc toutes dans l'équation (1), si l'on convient qu'un nombre d'heures affecté du signe — représente un temps passé, et qu'un nombre de mètres précédé du signe — représente une distance comptée à gauche de l'origine O.

2°. Je suppose maintenant que la température initiale n soit inférieure à zéro; l'extrémité M de la colonne mercurielle peut encore avoir trois positions différentes, relativement aux points O et N.

Fig. 8.

Selon que M est au-dessus de O, entre O et N, ou au-dessous de N, on a les relations

$$\mathrm{OM} + \mathrm{ON} = \mathrm{MN} \quad \text{ou} \quad x + n = vt \quad \text{ou} \quad x = vt - n,$$
$$\mathrm{NM} + \mathrm{OM} = \mathrm{ON} \quad \text{ou} \quad vt + x = n \quad \text{ou} \quad x = n - vt,$$
$$\mathrm{MN} + \mathrm{NO} = \mathrm{MO} \quad \text{ou} \quad vt + n = x \quad \text{ou} \quad x = n + vt.$$

Digitized by Google

Ces trois formules peuvent s'écrire

$$x = (-n) + vt,$$
$$(-x) = (-n) + vt,$$
$$(-x) = (-n) + v(-t);$$

elles rentrent donc toutes dans l'équation (1), si l'on admet les conventions faites dans le cas précédent.

3°. Par des raisonnements analogues, on voit que lorsque la température va en décroissant, la formule (1) est encore applicable, pourvu que la vitesse v qui change alors de sens soit représentée par un nombre négatif. Il y aurait, ici comme tout à l'heure, six cas particuliers à examiner; en sorte que nos conventions ramènent *douze* formules à *une seule*.

Je répéterai d'ailleurs que *toute la convention consiste à vouloir généraliser la formule* (1); il n'y en a pas d'autre; une fois qu'on est décidé à généraliser cette formule, le procédé de généralisation est *imposé*. Pour que les diverses formules du numéro précédent rentrent dans la première, *il faut représenter un changement de sens par un changement de signe*.

PROBLÈME DES COURRIERS.

124. Une rapide esquisse du problème classique des courriers va nous permettre de résumer les diverses notions présentées dans ce chapitre.

Deux courriers sont en marche depuis un temps indéfini sur une route qu'ils parcourent tous deux dans le même sens X'ABX. *Le premier, qui fait v kilomètres à l'heure, passe en* A *h heures avant que le second, dont la vitesse est v', arrive en* B; *la distance* AB *est de d lieues; trouver le point* R *où ces deux courriers se rencontrent.*

Fig. 9.

En prenant pour inconnue la distance BR $= x$, et en exprimant que la différence des temps

$$\frac{d+x}{v}, \quad \frac{x}{v'},$$

employés par les courriers pour aller de A en B et de B en R est égale à h, on obtient l'équation

$$(1) \qquad \frac{d+x}{v} - \frac{x}{v'} = h,$$

d'où

$$(2) \qquad x = \frac{v'(d - vh)}{v - v'};$$

les données v, v', d, h sont des nombres positifs.

Pour que x soit positif, il faut qu'on ait

$$\begin{matrix} d > vh, \\ v > v', \end{matrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{matrix} d < vh, \\ v < v'. \end{matrix}$$

Il y a donc, dans ces deux cas, rencontre au delà de B, comme on l'avait supposé dans la mise en équation. On peut, du reste, le voir à priori en remontant à l'énoncé.

Quand on a à la fois

$$\begin{matrix} d > vh, \\ v < v', \end{matrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{matrix} d < vh, \\ v > v', \end{matrix}$$

la valeur de x est négative. En changeant x en $-x$ dans l'équation (1), on voit aisément que le signe $-$ indique ici un changement de sens, en sorte que les courriers se rencontrent à gauche de B.

Pour compléter la discussion, il reste encore à examiner les cas suivants :

1°. $$\begin{cases} d = vh, \\ v \lesseqgtr v'; \end{cases}$$

2°. $$\begin{cases} d \gtreqless vh, \\ v = v'; \end{cases}$$

3°. $$\begin{cases} d = vh, \\ v = v'; \end{cases}$$

la valeur de x se présente alors sous la forme

$$x = 0, \qquad x = \frac{m}{0}, \qquad x = \frac{0}{0};$$

Or on reconnaît, en effet, à priori, en remontant à l'énoncé, que dans le premier cas la rencontre a lieu en B, que dans le second elle a lieu à l'infini, et que dans le troisième les courriers sont ensemble pendant tout le trajet.

Enfin, on peut donner encore plus d'extension à la formule (1) en introduisant les nombres négatifs dans les données mêmes. Ainsi, en regardant h comme positif ou négatif, selon que l'arrivée du second courrier en B suit ou précède l'arrivée du premier courrier en A, la formule (1) est encore applicable. Elle donnerait aussi les solutions relatives aux cas où les courriers vont tous les deux dans le sens XBAX', et au cas où les courriers vont en sens contraire, si l'on donnait des signes aux nombres v et v' qui expriment les vitesses. Ces discussions ne présentent aucune difficulté.

EXERCICES.

I. Deux lingots renferment, l'un a grammes d'or et b grammes d'argent, l'autre a' grammes d'or et b' grammes d'argent. Combien de grammes faut-il prendre à chacun d'eux pour former un troisième lingot contenant α grammes d'or et β grammes d'argent? Chercher les conditions de possibilité et les interpréter.

II. Plusieurs personnes puisent dans un vase contenant du vin; la première prend 1 litre plus le $n^{ième}$ de ce qui reste; la seconde prend ensuite 2 litres plus le $n^{ième}$ du reste, . . ., ainsi de suite. Il arrive que toutes les personnes ont la même quantité de vin; on demande le nombre des personnes et la part de chacune d'elles.

III. Deux horloges sonnent l'heure en même temps, l'une retarde sur l'autre de 2 secondes; les coups de la première se succèdent à 3 secondes et ceux de l'autre à 4 secondes d'intervalle; l'oreille ne perçoit d'ailleurs qu'un seul coup lorsque les deux horloges sonnent dans la même seconde. Trouver l'heure, sachant qu'on a entendu en tout 19 coups.

IV. Trois créanciers ont à réclamer d'une succession de a francs,

Digitized by Google

l'un p francs, l'autre q francs, le troisième r francs. Le tribunal, prenant en considération le plus ou moins de force de leurs droits, adjuge au second créancier m pour 100 et au troisième n pour 100 de plus qu'au premier. Combien chacun aura-t-il?

V. Inscrire dans un triangle de base b et de hauteur h un rectangle de périmètre donné. Discussion.

VI. Deux mobiles parcourent une circonférence de longueur l, avec des vitesses v et v'; un arc de a mètres les sépare au départ. Indiquer les époques de leurs rencontres successives, en supposant :

1°. Qu'ils marchent dans le même sens et que le premier parte t secondes avant l'autre;

2°. Qu'ils marchent dans le même sens et que le premier parte t secondes après l'autre;

3°. Qu'ils marchent en sens opposés et que le premier parte t secondes avant l'autre;

4°. Qu'ils marchent en sens opposés et que le premier parte t secondes après l'autre.

Peut-on, par l'introduction des quantités négatives, réduire les quatre groupes de formules à un seul?

CHAPITRE X.

RADICAUX. — IMAGINAIRES.

VALEUR ARITHMÉTIQUE D'UN RADICAL.

125. L'expression $\sqrt[m]{a}$ dans laquelle a représente un nombre positif quelconque, et m un nombre entier positif, n'a qu'une valeur positive, puisque deux nombres positifs différents ne peuvent pas avoir la même puissance $m^{ième}$; cette valeur unique porte le nom de *valeur arithmétique du radical* $\sqrt[m]{a}$.

Nous ne considérerons jusqu'au n° 139 que les valeurs arithmétiques des radicaux.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

126. *Pour élever un produit de facteurs à la puissance p, il faut élever chacun des facteurs à cette puissance.*

En effet, on a, par exemple,

$$(abc)^4 = abc.abc.abc.abc = (a.a.a.a)(b.b.b.b)(c.c.c.c) = a^4 b^4 c^4.$$

127. *La puissance pq d'un nombre est égale à la puissance q de sa puissance p.*

Ainsi

$$a^{2.3} = (a^2)^3;$$

car on a

$$(a^2)^3 = a^2.a^2.a^2 = a^{2+2+2} = a^{2.3}.$$

Corollaire. — Les deux nombres $(a^p)^q$ et $(a^q)^p$, égaux à a^{pq}, sont égaux entre eux.

128. *Deux radicaux sont équivalents, quand le rapport de leurs indices est égal au rapport des exposants des quantités placées sous le signe* $\sqrt{}$.

Ainsi

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m']{a^{n'}},$$

quand $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$.

En effet, en élevant les deux membres de cette égalité à la puissance mm', on a

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{mm'} = \left(\sqrt[m']{a^{n'}}\right)^{mm'},$$

ou (**127**)

$$\left[\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m\right]^{m'} = \left[\left(\sqrt[m']{a^{n'}}\right)^{m'}\right]^m,$$

$$(a^n)^{m'} = (a^{n'})^m$$

et

$$a^{nm'} = a^{n'm},$$

laquelle est évidente, puisque $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$ ou $mn' = m'n$.

RÉDUCTION DES RADICAUX AU MÊME INDICE.

129. Soit à réduire au même indice les radicaux

$$\sqrt[7]{a^5}, \quad \sqrt[24]{a^{17}}, \quad \sqrt[12]{a^{11}}, \quad \sqrt[3]{a^2}.$$

En divisant par les divers indices le plus petit multiple commun

$$7.2^3.3 = 168$$

de ces indices, on obtient les quotients

$$24, \quad 7, \quad 14, \quad 56,$$

et en multipliant dans chaque radical l'indice et l'exposant de a par le quotient correspondant, on obtient de nouveaux radicaux

$$\sqrt[168]{a^{120}}, \quad \sqrt[168]{a^{119}}, \quad \sqrt[168]{a^{154}}, \quad \sqrt[168]{a^{112}},$$

qui, d'après le n° **127**, sont équivalents aux premiers, et qui d'ailleurs ont le même indice. De là la règle suivante :

Pour réduire plusieurs radicaux au même indice, formez le plus petit multiple commun de leurs indices, divisez-le successivement par chacun de ces indices, et multipliez dans chaque radical l'indice et l'exposant par le quotient correspondant.

MULTIPLICATION ET DIVISION; PUISSANCES ET RACINES.

130. Pour multiplier des radicaux, on les ramène d'abord au même indice, puis on applique le théorème suivant :

Le produit de plusieurs radicaux de même indice s'obtient en affectant de l'indice commun le produit des quantités placées sous les signes $\sqrt{\ }$.

En effet, en formant la $m^{ième}$ puissance du produit

$$\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b} \cdot \sqrt[p]{c} \cdot \sqrt[p]{d},$$

d'après la règle du n° **126**, on trouve

$$abcd;$$

donc le produit

$$\sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{b} \cdot \sqrt[p]{c} \cdot \sqrt[p]{d},$$

est bien égal à la racine $m^{ième}$ de $abcd$.

131. Il suit de là que :

Pour diviser deux radicaux de même indice, on affecte de l'indice commun le quotient des quantités placées sous les signes $\sqrt{\ }$.

Car le théorème précédent appliqué aux radicaux

$$\sqrt[m]{b}, \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

donne

$$\sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{ab}{b}} = \sqrt[m]{a},$$

d'où

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

132. On voit encore que :

Pour élever un radical à une puissance, il faut élever à cette puissance la quantité placée sous le signe $\sqrt{\ }$.

Car le théorème (**130**) donne

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \ldots = \sqrt[m]{a^n}.$$

Inversement, *pour extraire la racine $n^{ième}$ d'un radical, on multiplie l'indice du radical par n.*

Digitized by Google

Ainsi

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

puisqu'en élevant les deux membres à la puissance mn, on trouve a de part et d'autre.

Scolie. — Les quantités

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}},\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}},$$

égales à $\sqrt[mn]{a}$, sont égales entre elles.

SIMPLIFICATION D'UN RADICAL.

133 Le théorème du n° **130** montre que les deux expressions

$$a\sqrt[n]{b},\quad \sqrt[n]{a^n b}$$

sont équivalentes, comme représentant l'une et l'autre le produit de $\sqrt[n]{a^n}$ par $\sqrt[n]{b}$. Quand on passe de la première à la seconde, on dit qu'*on fait entrer le facteur a sous le radical;* lorsqu'on revient de la seconde à la première, on dit qu'*on fait sortir le facteur a^n du radical.*

Il résulte de là et du théorème (**128**), que *pour réduire un radical à sa plus simple expression, il faut : 1° diviser son indice et tous les exposants des quantités soumises au radical par leur plus grand commun diviseur; 2° décomposer la quantité placée sous le signe $\sqrt{}$ en deux facteurs dont l'un soit la plus grande puissance possible de même degré que le radical, puis faire sortir ce facteur du radical.*

Exemple :

$$\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{25ac}{a^2-2ab+b^2}} = \frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{25}{(a-b)^2}\cdot ac}$$

$$= \frac{a-b}{a+b}\,\frac{5}{a-b}\sqrt{ac} = \frac{5\sqrt{ac}}{a+b}.$$

APPLICATIONS.

134. On a souvent besoin de transformer une fraction dont le dénominateur contient des radicaux en une autre équivalente dont le dénominateur soit rationnel. Voici quelques exemples :

1°. $$\frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{a\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2} = \frac{a}{n}\sqrt{n};$$

2°. $$\frac{a}{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}} = \frac{a(\sqrt{p} \mp \sqrt{q})}{(\sqrt{p} \pm \sqrt{q})(\sqrt{p} \mp \sqrt{q})} = \frac{a(\sqrt{p} \mp \sqrt{q})}{(\sqrt{p})^2 - (\sqrt{q})^2}$$
$$= \frac{a}{p-q}(\sqrt{p} \mp \sqrt{q});$$

3°. On rendrait de même rationnel le dénominateur de

$$\frac{a}{\sqrt{m} + \sqrt{p} + \sqrt{q}},$$

en multipliant d'abord haut et bas par $\sqrt{m} + \sqrt{p} - \sqrt{q}$, puis en multipliant les deux termes du résultat par $m + p - q - 2\sqrt{mp}$.

135. Comme application du calcul des radicaux, nous indiquerons encore une méthode générale pour trouver les vraies valeurs des expressions irrationnelles qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ par suite d'une valeur attribuée à *une seule* lettre.

Soit une expression de la forme

$$X = \frac{P + \sqrt[m]{M} - \sqrt[n]{N}}{Q + \sqrt[r]{R}}.$$

Les radicaux peuvent être en nombre quelconque, et les quantités P, Q, M, N, R sont des polynômes entiers en x. Par hypothèse, cette expression devient $\frac{0}{0}$ pour $x = a$, et l'on a

$$P_a + \sqrt[m]{M_a} - \sqrt[n]{N_a} = 0, \quad Q_a + \sqrt[r]{R_a} = 0.$$

on peut donc écrire

$$X = \frac{(P + \sqrt[m]{M} - \sqrt[n]{N}) - (P_a + \sqrt[m]{M_a} - \sqrt[n]{N_a})}{(Q + \sqrt[r]{R}) - (Q_a + \sqrt[r]{R_a})}$$

$$= \frac{\dfrac{P - P_a}{x - a} + \dfrac{\sqrt[m]{M} - \sqrt[m]{M_a}}{M - M_a}\,\dfrac{M - M_a}{x - a} - \dfrac{\sqrt[m]{N} - \sqrt[n]{N_a}}{N - N_a}\,\dfrac{N - N_a}{x - a}}{\dfrac{Q - Q_a}{x - a} + \dfrac{\sqrt[r]{R} - \sqrt[r]{R_a}}{R - R_a}\,\dfrac{R - R_a}{x - a}},$$

et comme cette expression se compose uniquement de fractions de l'une des deux formes

$$(1) \qquad \frac{\sqrt[m]{M} - \sqrt[m]{M_a}}{M - M_a}.$$

$$(2) \qquad \frac{M - M_a}{x - a},$$

il suffira de chercher les vraies valeurs de ces fractions, qui d'ailleurs deviennent aussi $\frac{0}{0}$ pour $x = a$.

Le numérateur de la fraction (2) étant un polynôme entier en x qui s'annule pour $x = a$, doit être divisible par $x - a$; on effectuera donc la division, et en faisant $x = a$ dans le quotient, on aura la vraie valeur de cette fraction.

Considérons maintenant la fraction (1); en posant

$$\sqrt[m]{M} = y, \quad \sqrt[m]{M_a} = \alpha,$$

d'où

$$M = y^m, \quad M_a = \alpha^m,$$

on a

$$\frac{\sqrt[m]{M} - \sqrt[m]{M_a}}{M - M_a} = \frac{y - \alpha}{y^m - \alpha^m} = \frac{1}{\dfrac{y^m - \alpha^m}{y - \alpha}} = \frac{1}{y^{m-1} + \alpha y^{m-2} + \ldots + \alpha^{m-1}},$$

qui, pour $x = a$, c'est-à-dire pour $y = \alpha$, devient

$$\frac{1}{m\alpha^{m-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{m\sqrt[m]{M_a^{m-1}}},$$

c'est la vraie valeur de la fraction (1).

Exemple. — L'expression

$$\frac{x-2+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^3-x},$$

qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x=1$, a pour vraie valeur $\frac{4}{9}$.

NOTATION DES EXPOSANTS FRACTIONNAIRES.

136. Le théorème (**128**) montre que les expressions

$$\sqrt[m]{a^n}, \quad \sqrt[m']{a^{n'}}$$

sont équivalentes, quand on a

$$\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'};$$

on est dès lors conduit à remplacer la notation

$$\sqrt[m]{a^n}$$

par la notation plus simple

$$a^{\frac{n}{m}}.$$

Ce nouveau symbole a sur le signe radical l'avantage de ne pas introduire de nouvelles règles de calcul; il résulte, en effet, des égalités suivantes, que *les exposants fractionnaires sont soumis aux mêmes règles que les exposants entiers.*

En considérant successivement la multiplication, la division, la formation des puissances et l'extraction des racines, on trouve

$$(1)\quad \begin{cases} a^{\frac{m}{n}}.a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}.\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}} \\ \qquad =a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}}+a^{\frac{p}{q}}. \end{cases}$$

$$(2)\quad a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}=\frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

$$(3)\quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p=\sqrt[n]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{n}}.$$

$$(4) \qquad \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[pn]{a^m} = a^{\frac{m}{pn}}.$$

$$(5) \qquad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

137. La relation (2) n'est vraie, dans tous les cas, qu'à la condition d'étendre la notation des exposants négatifs aux exposants fractionnaires. Ainsi l'*expression* $a^{-\mu}$ *doit toujours être regardée comme équivalente à* $\frac{1}{a^{\mu}}$ quel que soit μ, entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

On reconnaît d'ailleurs aisément que les règles relatives aux exposants négatifs, quels qu'ils soient, doivent être les mêmes que les règles relatives aux exposants positifs.

Soit, par exemple,

$$(a^{-p})^{-\frac{m}{n}},$$

on aura

$$(a^{-p})^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a^{-p})^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{(a^p)^{\frac{m}{n}}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{pm}{n}}}} = a^{\frac{pm}{n}} = a^{(-p)\cdot\left(-\frac{m}{n}\right)}.$$

138. « Le calcul des exposants fractionnaires, dit Lacroix, » est un des exemples les plus remarquables de l'utilité des signes » lorsqu'ils sont bien choisis. L'analogie qui règne entre les expo- » sants fractionnaires et ceux qui sont entiers, rend les règles qu'il » faut suivre dans le calcul de ceux-ci, applicables à celui des » autres, tandis qu'il faut des règles particulières pour le calcul » des radicaux, parce que le signe $\sqrt{}$ qui les exprime n'a » aucune liaison avec l'opération qui les engendre. Plus on avance » dans l'algèbre, plus on reconnaît les nombreux avantages qu'a » produits dans cette science la notation des exposants.... »

Les exposants négatifs ont été introduits en algèbre avant les exposants fractionnaires; les premiers sont dus à Michael Stifel

(1509-1567); l'introduction des seconds remonte à Simon Stevin, qui en 1588 écrivait $a^{\left(\frac{m}{n}\right)}$ au lieu de $a^{\frac{m}{n}}$.

Chez les anciens algébristes, les mots *fonction* et *dignité* étaient synonymes de *puissance;* le second a aujourd'hui disparu du langage mathématique, et le premier a été depuis Bernoulli (1690) détourné de sa signification primitive.

OBSERVATIONS SUR LES VALEURS ALGÉBRIQUES DES RADICAUX.

139. Nous allons maintenant donner un sens plus étendu aux radicaux que nous n'avons envisagés jusqu'ici que sous le rapport de leur valeur arithmétique.

m étant un nombre entier et positif, et A un nombre quelconque positif ou négatif, nous désignons par $\sqrt[m]{A}$ tous les nombres positifs ou négatifs dont la puissance $m^{ième}$ est égale à A; il y a quatre cas à distinguer :

1°. Si A est positif et m impair, $\sqrt[m]{A}$ n'a qu'une valeur; c'est le nombre positif que nous considérions tout à l'heure; c'est sa *valeur arithmétique.*

2°. Si A est positif et m pair, $\sqrt[m]{A}$ admet évidemment deux valeurs, d'abord sa valeur arithmétique, puis une valeur négative égale en valeur absolue à la valeur arithmétique. Ainsi

$$\sqrt[2]{4} = \pm 2.$$

3°. Si A est négatif et m impair, $\sqrt[m]{A}$ a une valeur négative égale en valeur absolue à la racine arithmétique $\sqrt[m]{-A}$; ainsi l'on a

$$\sqrt[m]{A} = -\sqrt[m]{-A}$$

lorsque A est négatif.

Exemple :

$$\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt{8}.$$

4°. Si A est négatif et m pair, $\sqrt[m]{A}$ ne représente aucun nombre positif ou négatif; car toutes les puissances paires d'un nombre positif ou négatif sont positives. Par exemple, il n'existe pas de

nombre positif ou négatif dont le carré soit -4, en sorte que $\sqrt{-4}$ est un symbole dépourvu de toute signification. Le symbole le plus général de ce genre est

$$\sqrt[n]{-b^2},$$

on lui donne le nom d'*expression imaginaire ;* mais ce n'est pas un nombre qui puisse servir de mesure à une grandeur ; c'est une pure notation, qu'on introduit utilement dans les calculs, et qui *est définie par la condition que sa puissance* $2n$ *soit égale à* $-b^2$.

DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

140. Ne considérons que les imaginaires provenant des radicaux du second degré, et appelons *expression imaginaire* toute expression de la forme

$$(1) \qquad a + \sqrt{-b^2}$$

où a et b désignent des nombres positifs ou négatifs quelconques, qui par opposition sont dits *réels*.

Lorsqu'on a à faire des calculs sur des expressions de la forme

$$a + \sqrt{c},$$

on ignore si la mise en nombres rendra ultérieurement la valeur de c positive ou négative ; si à chacun de ces deux cas correspondaient des règles d'opérations particulières, l'impossibilité de décider dans quel cas on se trouve conduirait à subdiviser ces questions à l'infini, et il n'y a de calcul algébrique possible qu'autant que l'on applique aux nombres imaginaires les règles démontrées pour les nombres réels.

Il résulte immédiatement de là qu'on peut faire sortir le facteur b^2 du radical, et ramener l'expression (1) à la forme type

$$(2) \qquad a + b\sqrt{-1},$$

$\sqrt{-1}$ est alors le seul facteur imaginaire qui entre dans les calculs ; on le représente par la lettre i, et l'on opère sur l'expression

$$(3) \qquad a + bi$$

comme si elle était réelle, avec la condition de remplacer dans le

résultat

$$\begin{array}{lll} i & \text{par} & i, \\ i^2 & \text{par} & -1, \\ i^3 & \text{par} & -i, \\ i^4 & \text{par} & +1, \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \end{array}$$

141. Lorsqu'on pose une égalité entre des quantités réelles et imaginaires, comme

$$(4) \qquad A + Bi = A' + B'i,$$

on doit savoir d'avance que

$$A = A' \quad \text{et} \quad B = B'.$$

Ces dernières égalités ne sont jamais des conséquences de la première; c'est au contraire la première qui résulte des deux autres. Ainsi une relation entre des quantités réelles et imaginaires n'aurait aucun sens, si l'on ne savait, d'autre part, que les quantités réelles sont égales entre elles ainsi que les coefficients de i.

ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION ET DIVISION DES IMAGINAIRES.

142. En combinant les deux expressions

$$a + bi, \quad c + di$$

par addition, soustraction, multiplication et division, on trouve successivement

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bdi^2 + (ad + bc)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - bdi^2 + (bc - ad)i}{c^2 - d^2 i^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i,\end{aligned}$$

et l'on voit que tous ces résultats sont de la forme

$$A + Bi.$$

143. Théorème I. — *En multipliant membre à membre plusieurs égalités de la forme*

$$(1) \qquad a + bi = a' + b'i,$$

on obtiendra une égalité de la forme (**141**)

$$(2) \qquad A + Bi = A' + B'i,$$

dans laquelle A *sera égal à* A′ *et* B *sera égal à* B′.

En effet, avant de rabaisser les exposants de i au-dessous de 2, en posant $i^2 = -1$, les deux membres de l'égalité qu'on obtient en multipliant les égalités (1) seront deux polynômes de même degré en i et qui ne différeront que par le changement de a, b,..., en a', b',...; dans ces deux polynômes, les coefficients des mêmes puissances de i seront donc égaux, puisqu'en posant les égalités (1), on savait d'avance que a, b,..., étaient égaux à a', b',...; l'égalité de ces coefficients subsistera donc quand on aura rabaissé les exposants de i au-dessous de 2, et l'on aura

$$A = A', \quad B = B'.$$

144. Théorème II. — *Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

Il s'agit d'étendre à un produit de facteurs imaginaires ce théorème qui est évident pour un produit de facteurs réels.

Soit donc le produit

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

on n'a le droit de l'égaler à zéro que lorsqu'on sait d'avance que les quantités $ac - bd$, $ad + bc$ sont séparément nulles, et, par suite, que l'on a

$$(1) \qquad (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = 0.$$

Réciproquement cette relation entraîne

$$ac - bd = 0, \quad ad + bc = 0,$$

et, par conséquent, annule le produit qui précède.

Or l'égalité (1) peut s'écrire

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0;$$

elle exige donc qu'on ait

$$\text{soit } \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \end{cases} \qquad \text{soit } \begin{cases} c = 0, \\ d = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que l'un des facteurs imaginaires soit nul.

UTILITÉ DES IMAGINAIRES. — NOUVELLE DÉFINITION DE L'ALGÈBRE.

145. Le signe $\sqrt{-1}$ est dû au géomètre bolonais Bombelli; mais c'est Albert Girard qui a montré le premier l'utilité de l'introduction des imaginaires dans la langue algébrique. Nous allons faire voir comment l'emploi transitoire de ces symboles permet d'arriver d'une manière élégante et rapide à des résultats dont la démonstration directe serait souvent fort pénible.

Si dans l'identité

$$\begin{aligned} &(\alpha\beta' - \beta\alpha')(\gamma\delta' - \delta\gamma') \\ &= (\alpha\gamma + \alpha'\gamma')(\beta\delta + \beta'\gamma') - (\alpha\delta + \alpha'\delta')(\beta\gamma + \beta'\gamma'), \end{aligned}$$

on fait

$$\begin{aligned} &\alpha = a + bi, \quad \gamma = p + qi, \quad \alpha' = -c - di, \quad \gamma' = -r + si, \\ &\beta = c + di, \quad \delta = r + si, \quad \beta' = \quad a - bi, \quad \delta' = \quad p - qi, \end{aligned}$$

on obtient la relation

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) \\ &= (pa - qb + rc - sd)^2 + (qa + qb - sc - rd)^2 \\ &+ (ra - sb - pc + qd)^2 + (sa + rb + qc + pd)^2, \end{aligned}$$

qui exprime que *le produit de deux sommes de quatre carrés est encore une somme de quatre carrés.*

Ce théorème est dû à Euler, mais la démonstration précédente est de M. Hermite.

146. Ce qui rend légitime l'emploi transitoire des imaginaires,

c'est que les relations d'où l'on part n'expriment que des faits de *combinaison*.

Pour éclaircir cette idée, prenons un exemple simple. Soient

$$\alpha, \alpha, \alpha', \alpha',$$

quatre facteurs égaux deux à deux ; on obtient leur produit en multipliant indifféremment le produit de deux quelconques d'entre eux par celui des deux autres, et l'on a

$$(\alpha\alpha)(\alpha'\alpha') = (\alpha\alpha')(\alpha\alpha').$$

Cette égalité exprime un fait indépendant de toute propriété des grandeurs ; elle est la traduction algébrique d'un principe qui résulte seulement de ce que la multiplication est une combinaison dans laquelle les facteurs entrent symétriquement ; et pour que ce principe subsiste, il n'est pas nécessaire qu'on attache un sens arithmétique à cette combinaison, ni par suite que les facteurs représentent des nombres réels. On peut donc poser

$$\alpha = a + bi, \quad \alpha' = a - bi,$$

et l'égalité primitive devient

$$(a + bi)^2 (a - bi)^2 = [(a + bi)(a - bi)]^2,$$
$$(a^2 - b^2 + 2abi)(a^2 - b^2 - 2abi) = (a^2 + b^2)^2,$$
$$(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

d'où l'on voit que, *si un nombre de la somme est deux carrés, son carré jouit de la même propriété.*

Nous dirons donc avec M. Poinsot :

« Il y a une algèbre supérieure qui repose tout entière sur la » théorie de l'ordre et des combinaisons, qui s'occupe de la » nature et de la composition des formules considérées en elles-» mêmes, comme de purs symboles et sans aucune idée de valeur » ou de quantité. C'est à cette partie qu'on doit rapporter la théo-» rie profonde des équations, celles des expressions imaginaires, » et tout l'art des transformations algébriques ; et c'est même cette » seule partie élevée de la science qui mérite, à proprement » parler, le nom d'*Algèbre*. »

EXERCICES.

I. Diviser $a^{\frac{p}{q}} - b^{\frac{p}{q}}$ par $a^{\frac{1}{q}} - b^{\frac{1}{q}}$.

II. Exprimer $x^3 + x^{-3}$ en fonction de $x + x^{-1}$.

III. Simplifier les expressions

$$\frac{\sqrt[12]{a^{10} b^9} - c\sqrt[10]{a^7}\sqrt[6]{b^5} - \frac{3}{2} a\sqrt[4]{b^3} + \frac{3}{2} abc\sqrt[30]{a^{-4} b^{-3}}}{\sqrt{ab} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{a^4 b^3}},$$

$$\frac{(5a^2 - 41ab + 42b^2)\sqrt[12]{a}}{\sqrt[3]{a} - 7b\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}.$$

IV. Mettre $a + bi$ sous la forme $\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$; quelles sont les valeurs de ρ et de ω? ρ est dit le module et ω l'argument de l'expression imaginaire considérée.

V. Vérifier les formules

$$[\rho(\cos\omega + i\sin\omega)][\rho'(\cos\omega' + i\sin\omega')]$$
$$= \rho\rho'[\cos(\omega + \omega') + i\sin(\omega + \omega')],$$
$$[\rho(\cos\omega + i\sin\omega)]^m = \rho^m(\cos m\omega + i\sin m\omega).$$

VI. Démontrer les inégalités

$$\alpha + \tfrac{1}{2}\delta - \sqrt{\alpha(\alpha + \delta)} < \frac{\delta^2}{8\alpha}, \quad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a - \alpha} < \frac{\alpha}{3\sqrt[3]{(a - \alpha)^2}}.$$

VII. Démontrer que

$$(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} - x$$

tend vers zéro pour $x = \infty$, et que la fraction

$$\frac{\left(M + N^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} - \left(M_a + N_a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}}{x - a}$$

tend vers

$$\frac{1}{m\sqrt[m]{\left(M_a + N_a^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}}}\left[\lim\frac{M - M_a}{x - a} + \frac{1}{n\sqrt[n]{N_a^{n-1}}}\lim\frac{N - N_a}{x - a}\right]$$

pour $x = a$.

CHAPITRE XI.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE.

FORME A LAQUELLE ON RAMÈNE LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

147. Une équation à une seule inconnue x est du second degré lorsque ses deux membres, rendus entiers par rapport à x, renferment cette inconnue à la seconde puissance, sans la contenir à une puissance supérieure.

Exemple :

$$80x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{21x - 27782}{12} = 1859\frac{1}{3} - 3x^2.$$

Une telle équation ne possède que trois sortes de termes : des termes en x^2, des termes en x et des quantités connues. On peut toujours la ramener à la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

où a, b, c désignent des quantités quelconques numériques ou algébriques, monômes ou polynômes; il suffit pour cela de transporter tous les termes dans un même membre, de mettre x^2 en facteur de toutes les quantités qu'il multiplie, de réunir de même les termes en x, et de grouper les quantités connues.

Ainsi l'équation précédente devient successivement

$$80x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{21x - 27782}{12} - 1859\frac{1}{3} + 3x^2 = 0,$$

$$\left(3 + \frac{3}{4}\right)x^2 + \left(80 + \frac{21}{12}\right)x - \frac{27782}{12} - 1859\frac{1}{3} = 0,$$

$$\frac{15}{4}x^2 + \frac{981}{12}x - \frac{50094}{12} = 0,$$

$$45x^2 + 981x - 50094 = 0.$$

RÉSOLUTION GÉNÉRALE.

148. Soit l'équation générale

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0;$$

on peut toujours supposer a différent de zéro, puisque, si a était nul, l'équation serait du premier degré. Dès lors, en multipliant par $4a$, on n'altère pas les conditions imposées à l'inconnue, et la nouvelle relation

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

ayant ses deux premiers termes égaux à ceux du carré

$$(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2,$$

peut être mise sous la forme

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

ou

$$(2) \qquad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

$2ax + b$ est donc égal à tous les nombres dont le carré est $b^2 - 4ac$. Il peut se présenter trois cas :

1°. Si $b^2 - 4ac$ est > 0, il y a toujours deux nombres et il n'y en a que deux

$$+\sqrt{b^2 - 4ac}, \qquad -\sqrt{b^2 - 4ac},$$

qui ont $b^2 - 4ac$ pour carré; par conséquent l'équation (2) tient lieu des relations

$$2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}, \qquad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac},$$

qui donnent

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

L'équation (1) *a donc deux racines réelles et inégales lorsque* $b^2 - 4ac$ *est positif.*

2°. Si $b^2 - 4ac$ est nul, l'équation (2) se réduit à

$$(2ax + b)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2ax + b = 0;$$

de sorte que l'inconnue x n'a qu'une valeur

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Néanmoins on dit que, *dans le cas de* $b^2 - 4ac = 0$, *l'équation* (2) *a deux racines égales.*

3°. *Lorsque* $b^2 - 4ac$ *est négatif*, l'équation (2) n'admet pas de solution positive ou négative, car le premier membre, qui est un carré parfait, ne peut être égal à un nombre négatif.

Cependant, on convient de dire que *l'équation* (1) *a deux racines* représentées par la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

et que ces racines sont *imaginaires.*

Il est facile de vérifier qu'en substituant ces expressions à l'inconnue, on rend l'équation (1) identique, pourvu qu'on traite ces racines carrées des nombres négatifs d'après les règles ordinaires de l'Algèbre, et qu'on regarde leurs carrés comme s'obtenant par la suppression du radical. Il en serait de même si, au lieu de

$$\sqrt{b^2 - 4ac},$$

on écrivait

$$\sqrt{4ac - b^2}\,\sqrt{-1};$$

et c'est ce que l'on fait ordinairement, afin que la seule quantité imaginaire à considérer dans les calculs soit $\sqrt{-1}$. Les valeurs de x prennent alors la forme

$$x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1},$$

et l'on opère sur de telles expressions comme si $\sqrt{-1}$ était un nombre ordinaire ayant pour puissances successives

$$\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}, \quad +1, \quad \sqrt{-1}, \ldots.$$

L'introduction des imaginaires dans la langue algébrique permet ici d'énoncer ce théorème général :

Une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a toujours deux racines réelles ou imaginaires données par la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

149. On a souvent à résoudre des équations de la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

c'est-à-dire des équations du second degré, dans lesquelles le coefficient de x^2 est l'unité. On peut d'ailleurs, si l'on veut, ramener l'équation générale

$$ax^2 + bx + c = 0$$

à cette forme, en divisant par a.

En appliquant la formule générale à l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

on trouve

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Il peut se faire encore que le coefficient b de x soit divisible par 2, c'est-à-dire égal à $2b'$; les racines de l'équation

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

prennent la forme

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

150. Les trois formules

$$(1) \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$(2) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$(3) \qquad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a},$$

doivent être retenues par cœur. Il faut savoir les appliquer sans hésitation dans chaque cas particulier.

EXEMPLES :

1°. $$8x^2 - 7x + 34 = 0;$$

la formule (1) donne

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4.8.34}}{2.8} = \frac{7 \pm \sqrt{-1039}}{16}.$$

2°. $$x^2 - 7x + 3\frac{1}{4} = 0;$$

la formule (2) donne

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 3\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4}},$$

$$x' = \frac{7}{2} + \frac{6}{2} = \frac{13}{2},$$

$$x'' = \frac{7}{2} - \frac{6}{2} = \frac{1}{2}.$$

3°. $$21x^2 - 1616x + 20748 = 0;$$

la formule (3) donne

$$x = \frac{808 \pm \sqrt{808^2 - 21.20748}}{21},$$

$$x' = 60\frac{2}{3},$$

$$x'' = 16\frac{2}{7}.$$

4°. Prenons enfin un exemple littéral

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + 2\frac{a^2 - 6ab + b^2}{(a+b)(a-3b)} = 0.$$

En chassant les dénominateurs, réduisant et appliquant la formule on obtient

$$x = \frac{a^3 - 5a^2b - 5ab^2 + b^3 \pm \sqrt{(a^3 - 5a^2b + 11ab^2 + b^3)^2}}{4(a^2 - 4ab - b^2)}$$

et en séparant les racines

$$x' = \frac{a-b}{2}, \qquad x'' = -\frac{4ab^2}{a^2 - 4ab + b^2}.$$

Digitized by Google

EXAMEN D'UN CAS PARTICULIER REMARQUABLE.

151. La formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

n'est démontrée qu'autant que a est différent de zéro. Mais nous savons (**102**) que cette formule sera encore dans ce cas d'accord avec l'équation, si l'hypothèse non permise $a = 0$ lui fait acquérir des valeurs déterminées (ou infinies).

Or, pour $a = 0$, on trouve

$$x' = \frac{-b - b}{0} = \frac{-2b}{0}, \qquad x'' = \frac{-b + b}{0} = \frac{0}{0};$$

l'une des racines est infinie; l'autre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$: mais elle est cependant déterminée, car si avant de faire $a = 0$ dans l'expression

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

on multiplie haut et bas par

$$-b - \sqrt{b^2 - 4ac},$$

il vient

$$x'' = \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

qui, après la suppression des facteurs $2a$, donne pour $a = 0$,

$$x'' = -\frac{c}{b}.$$

RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES.

152. Les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

sont

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$, et leur produit a pour valeur

$$\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

En opérant sur l'équation

$$x^2+px+q=0,$$

on eût trouvé $-p$ pour la somme et q pour le produit des racines, en sorte qu'on peut dire : *Dans toute équation du second degré dont le terme en x^2 a pour coefficient l'unité, la somme des racines est égale au coefficient de x pris en signe contraire et le produit des racines est égal au terme tout connu.*

Il suit de là : 1°. Que si deux nombres ont une somme S et un produit P, ils sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2-Sx+P=0.$$

2°. Que, *pour former une équation du second degré dont les racines soient deux nombres donnés, il faut prendre l'unité pour coefficient de x^2, prendre la somme de ces nombres changée de signe pour coefficient de x, et écrire le produit de ces nombres pour terme tout connu.*

Ainsi, l'équation du second degré qui a pour racines les nombres

$$3+\sqrt{5},\qquad 3-\sqrt{5}$$

est

$$x^2-(3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5})x+(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=0,$$
$$x^2-6x-4=0.$$

153. Le théorème précédent permet encore de trouver les signes des racines d'une équation du second degré, sans résoudre l'équation, *lorsque ces racines sont réelles.*

D'abord, suivant que $\frac{c}{a}$ a le signe + ou le signe —, les racines sont de même signe ou de signes contraires. Dans le premier cas, le signe commun des racines est celui de leur somme $-\frac{b}{a}$; dans le second cas, le signe de la somme $-\frac{b}{a}$ est celui de la plus grande racine.

Exemples :

1°. $$3x^2 - 2x - 65 = 0;$$

les racines sont de signes contraires, puisque leur produit $-\frac{65}{3}$ est négatif; la plus grande a le signe $+$, puisque leur somme $\frac{2}{3}$ est positive.

2°. $$21x^2 - 1616x + 20748 = 0;$$

les racines sont de même signe, puisque leur produit $\frac{20748}{21}$ est positif; elles ont d'ailleurs le signe $+$, puisque leur somme $\frac{1616}{21}$ a ce signe.

Avant d'appliquer ces règles, il faut toujours voir si les racines sont réelles, c'est-à-dire vérifier que le nombre $b^2 - 4ac$ est positif. Il est un cas où, pour reconnaître la réalité des racines, il n'est pas nécessaire de recourir à l'expression $b^2 - 4ac$; *les racines sont toujours réelles quand le terme* $\frac{c}{a}$ *est négatif.*

En effet, l'égalité

$$a^2 . \frac{c}{a} = ac$$

montre que lorsque $\frac{c}{a}$ est négatif, il en est de même de ac; par suite le produit $-4ac$ est positif, et *à fortiori* l'expression

$$b^2 - 4ac.$$

Ainsi, à l'inspection même de l'équation

$$3x^2 + 2x - 65 = 0,$$

on doit dire que les racines sont réelles.

PROPRIÉTÉS DU TRINOME $ax^2 + bx + c$.

154. Théorème I. — *Tout trinôme du second degré*

$$ax^2 + bx + c$$

est égal au produit du coefficient a par les binômes

$$x - x' \qquad x - x''$$

qu'on obtient en retranchant de x les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

En effet, on a identiquement

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2\right],$$

et en substituant à la différence des carrés située entre les crochets le produit de la somme par la différence des racines, on obtient

$$ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$
$$= a(x - x')(x - x'').$$

155. Il résulte de là que l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

équivaut à

$$a\left(x - \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

laquelle tient lieu de (**144**)

$$x - \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

et de

$$x - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

d'où l'on conclut d'une nouvelle façon que l'équation du second

degré a deux racines données par la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et n'en a que deux.

156. Le théorème précédent permet encore de trouver les relations du n° **152** entre les coefficients et les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

En effet, dans les deux trinômes *identiques* (**154**)

$$ax^2 + bx + c, \qquad a(x - x')(x - x'')$$

ou

$$a^2 - a(x' + x'')x + ax'x'';$$

les coefficients des diverses puissances de x doivent être les mêmes; on a donc

$$b = -a(x' + x'') \quad \text{et} \quad c = ax'x'',$$

d'où

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Inversement, des relations

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \qquad x'x'' = \frac{c}{a},$$

on déduit

$$b = -a(x' + x''), \qquad c = ax'x''$$

et

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(x' + x'') + ax'x'' \\ &= a[x^2 - (x' + x'')x + x'x''] \\ &= a[x(x - x') - x''(x - x')] \\ &= a(x - x')(x - x''). \end{aligned}$$

157. Enfin, ce théorème permet aussi de former une équation du second degré dont les racines sont deux nombres donnés α et β. Il suffit évidemment d'écrire

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0,$$

puisque le premier membre s'annule pour $x = \alpha$ et pour $x = \beta$.

158. THÉORÈME II. — *Le trinôme*

$$ax^2 + bx + c$$

est de même signe que son premier terme, excepté lorsque l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a ses racines réelles et que x est compris entre ces deux racines.

On distingue trois cas, suivant que l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a ses racines imaginaires, réelles et égales, ou réelles et inégales.

1°. Lorsque les racines sont imaginaires, en les désignant par

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

on a

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[x - (\alpha + \beta\sqrt{-1})\right]\left[x - (\alpha - \beta\sqrt{-1})\right] \\ &= a\left[(x - \alpha) - \beta\sqrt{-1}\right]\left[(x - \alpha) + \beta\sqrt{-1}\right] \\ &= a\left[(x - \alpha)^2 + \beta^2\right]. \end{aligned}$$

Le trinôme est alors le produit de a par la somme de deux carrés; il est donc, quel que soit x, de même signe que a.

2°. Lorsque $b^2 - 4ac$ est nul, c'est-à-dire lorsque les deux racines x' et x'' de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sont égales, on a

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')^2;$$

et l'on voit que tout nombre substitué à x rend le trinôme de même signe que a.

3°. Enfin, quand les racines x' et x'' sont réelles et inégales, on a

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'');$$

tout nombre compris entre x' et x'' rend les facteurs

$$x - x', \quad x - x''$$

de signes contraires; le produit de ces binômes est donc négatif,

et l'expression

$$a(x-x')(x-x'')$$

est de signe contraire à a.

Tout nombre supérieur à la plus grande des racines x', x'', ou inférieur à la plus petite, rend les facteurs

$$x-x', \quad x-x''$$

de même signe; le produit de ces binômes est donc positif, et le trinôme

$$a(x-x')(x-x'')$$

a le signe de a.

159. Ce théorème est très-utile; il permet de trouver les valeurs de x pour lesquelles un trinôme du second degré est positif ou négatif.

Soit, par exemple, le trinôme

$$3x^2-2x-65;$$

l'équation $3x^2-2x-65=0$ ayant pour racines

$$5 \quad \text{et} \quad -\frac{13}{3},$$

on doit conclure que le trinôme proposé est positif pour toutes les valeurs de x supérieures à 5, ainsi que pour les valeurs de x inférieures à $-\frac{13}{3}$; il est négatif pour x compris entre 5 et $-\frac{13}{3}$.

Le trinôme

$$-x^2+3x-7,$$

qui donne lieu à une équation

$$x^2-3x+7=0,$$

dont les racines sont imaginaires, est toujours négatif, quel que soit x.

EXERCICES.

I. Résoudre les équations

$$x^2 - x = 4\sqrt[3]{4}(7 - 4\sqrt{3}) - 2\sqrt[3]{2}(2 - \sqrt{3}),$$

$$(4a^2 - 9cd^2)x^2 + (4a^2c^2 + 4abd^2)x + (ac^2 + bd^2)^2 = 0,$$

$$\frac{5a + 10ab^2}{9b^2 - 3a^2b^2}x^2 + \frac{cd}{ab}\sqrt{(a+b)c} - \frac{5\sqrt{a+b}}{3b^3}x = \frac{(1+2b^2)cd\sqrt{c}}{3 - a^2}x,$$

$$ab^3x^2 + bd\sqrt{c} - b^3d\sqrt{c}x = (ab + c)(1 + c)x - bd\sqrt{c^3} - cb^2x^2,$$

$$\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^3}, \quad \left(\frac{a + x}{a - x}\right)^2 = 1 + \frac{cx}{ab},$$

$$\sqrt{a + x} + \sqrt{b + x} + \sqrt{c + x} = 0,$$

$$\sqrt[m]{(1 + x)^2} - \sqrt[m]{(1 - x)^2} = \sqrt[m]{1 - x^2}.$$

II. Faire la somme des carrés, la somme des cubes, la somme des quatrièmes puissances, et la somme des inverses des quatrièmes puissances des racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

III. Résoudre l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

en posant $x = y + h$ et déterminant h de façon que l'équation obtenue $y^3 + Ay + B$ n'ait pas de terme en y.

IV. Résoudre l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

en l'identifiant avec celle que fournit l'élimination de y entre les relations

$$y^3 = c, \quad x = a + by + y^2.$$

V. Si l'on porte sur une droite, à partir d'une origine fixe, des longueurs proportionnelles aux racines de l'équation

$$A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0,$$

les deux points ainsi obtenus portent le nom de *points racines*. Soit L un point quelconque de la droite située à une distance l de l'origine, le produit des distances de ce point aux deux points racines, c'est-à-dire la *puissance* de ce point L par rapport au système des deux points, a pour expression

$$l^2 + \frac{A_2}{A_1} l + \frac{A_3}{A_1}.$$

Lorsque trois systèmes de points racines placés sur la même droite ont la même puissance par rapport à un point L, ces deux points sont dits en *involution*, et le point L prend le nom de *point central*.

Cela posé, on demande la condition pour que les trois couples

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$
$$b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0,$$
$$c_2 x^2 + c_1 x + c_3 = 0$$

soient en involution, et la distance à l'origine du centre d'involution.

VI. Condition pour que les équations

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p' x + q' = 0$$

aient une racine commune.

CHAPITRE XII.

EQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ.

ÉQUATIONS BICARRÉES.

160. On ramène l'équation

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

à une équation du second degré, en posant $x^m = y$; on a alors

$$ay^2 + by + c = 0,$$

d'où

$$y \quad \text{ou} \quad x^m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et

$$x = \sqrt[m]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Dans le cas de $m = 2$, l'équation proposée

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

prend le nom d'équation *bicarrée :* ses racines sont données par la formule

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Elles sont donc au nombre de quatre, et elles sont égales deux à deux et de signes contraires. Toutes les quatre sont réelles si les deux racines de l'équation

$$ay^2 + by + c = 0$$

sont positives; si une seule des valeurs de y est positive, x n'a que deux valeurs réelles. Enfin si l'équation en y n'a que des racines négatives ou imaginaires, x est imaginaire.

TRANSFORMATION DES EXPRESSIONS DE LA FORME $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

161. La résolution des équations bicarrées conduit à des expressions telles que

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}.$$

Nous allons chercher dans quel cas une semblable expression peut être ramenée à la forme

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y},$$

où x et y sont des quantités rationnelles.

En remplaçant les deux relations

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x}+\sqrt{y},$$
$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

par leur somme et leur différence

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}} = 2\sqrt{x},$$
$$\sqrt{A+\sqrt{B}} - \sqrt{A-\sqrt{B}} = 2\sqrt{y},$$

puis élevant au carré, on trouve

$$4x = A+\sqrt{B}+2\sqrt{A^2-B}+A-\sqrt{B} = 2A+2\sqrt{A^2-B},$$
$$4y = A+\sqrt{B}-2\sqrt{A^2-B}+A-\sqrt{B} = 2A-2\sqrt{A^2-B},$$

d'où

$$x = \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}, \qquad y = \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

et

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Cette formule est vraie, quels que soient A et B; mais elle n'est avantageuse qu'autant que x et y sont rationnels, c'est-à-dire qu'autant que la quantité A^2-B est un carré parfait.

Digitized by Google

EXEMPLES :

1°. $$\sqrt{43-15\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{43+\sqrt{43^2-8.15^2}}{2}}$$
$$-\sqrt{\frac{43-\sqrt{43^2-8.15^2}}{2}}=5-3\sqrt{2}.$$

2°. On démontre en géométrie qu'en désignant par c le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon r, et par x le côté d'un polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés, on a

$$x=\sqrt{2r^2-\sqrt{4r^4-c^2r^2}};$$

ici

$$A=2r^2,\quad B=4r^4-c^2r^2,\quad A^2-B=4r^4-4r^4+c^2r^2=c^2r^2$$

et l'on a

$$x=\sqrt{\frac{2r^2+cr}{2}}-\sqrt{\frac{2r^2-cr}{2}}=\sqrt{r\left(r+\frac{1}{2}c\right)}-\sqrt{r\left(r-\frac{1}{2}c\right)}.$$

3°. $$\sqrt{\alpha\pm6\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+6^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+6^2}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+6^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+6^2}-\alpha}{2}}\sqrt{-1}.$$

Le résultat est donc encore de la forme $A+B\sqrt{-1}$.

SYSTÈMES FORMÉS PAR UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ ET UNE DU SECOND.

162. Soit proposé de résoudre le système

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$mx+ny+p=0.$$

En remplaçant dans la première équation y par sa valeur déduite de la seconde, on obtient le système

$$ax^2-bx\frac{mx+p}{n}+c\left(\frac{mx+p}{n}\right)^2+dx-e\frac{mx+p}{n}+f=0,$$
$$y=-\frac{mx+p}{n},$$

qui équivaut au premier, et dans lequel la première équation est du second degré en x seul. La résolution de cette équation donnera pour x deux valeurs qui fourniront chacune une valeur de y.

En général, lorsqu'on a un groupe composé de $n-1$ équations du premier degré et d'une seule du second, on exprime à l'aide des équations du premier degré $n-1$ inconnues en fonction de la $n^{ième}$; puis on porte ces valeurs dans l'équation du second degré qui donne pour cette $n^{ième}$ inconnue deux valeurs à chacune desquelles correspond un groupe de valeurs des autres inconnues. Un tel système admet donc en général deux solutions, et n'en admet que deux.

ARTIFICES PARTICULIERS.

163. On substitue souvent avec avantage des procédés particuliers à la méthode générale. Les artifices les plus usités consistent à prendre pour inconnues la somme et la différence des inconnues primitives, ou bien leur somme et leur produit, c'est-à-dire à ramener le système proposé à l'un des groupes

$$x+y=s, \qquad x+y=s,$$
$$x-y=d, \qquad xy=p.$$

Dans le premier cas, x et y ont pour valeurs

$$x=\frac{1}{2}(s+d), \qquad y=\frac{1}{2}(s-d),$$

et dans le second, x et y sont les racines de l'équation du second degré (**152**)

$$Z^2-sZ+p=0.$$

Exemple I. — Le système

$$x^2-y^2=a, \qquad x-y=b,$$

équivaut à

$$x+y=\frac{a}{x-y}=\frac{a}{b}, \qquad x-y=b,$$

d'où

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+b\right)=\frac{a+b^2}{2b},$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-l\right)=\frac{a-b^2}{2b}.$$

EXEMPLE II.

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad x + y = b.$$

En retranchant la première équation du carré de la seconde, on trouve

$$(x+y)^2 - x^2 - y^2 = 2xy = b^2 - a^2$$

ou

$$xy = \frac{b^2 - a^2}{2};$$

x et y sont donc les racines de l'équation du second degré

$$Z^2 - bZ + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0,$$

d'où

$$Z = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = \frac{b \pm \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

Pour que Z soit réel, il faut que $2a^2$ soit $> b^2$; le minimum de a^2 est donc $\frac{1}{2}b^2$, et alors

$$x = y = \frac{b}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

de là ce théorème : *La somme des carrés de deux nombres dont la somme est constante est minimum lorsque ces nombres sont égaux.* On peut encore l'énoncer :

De tous les rectangles de même périmètre, le carré est celui qui a la plus petite diagonale.

De tous les carrés inscrits dans un carré donné, le carré minimum est celui que l'on forme en joignant les milieux des côtés du carré donné.

Parmi tous les triangles rectangles dans lesquels la somme des côtés de l'angle droit est constante, celui qui a la plus petite hypoténuse est le triangle isocèle.

EXEMPLE III.

$$x - y = a, \qquad xy = b.$$

En ajoutant au carré de la première équation le produit de la seconde

par 4, on trouve

$$(x-y)^2+4xy=a^2+4b,$$

ou

$$(x+y)^2=a^2+4b$$

et

$$x+y=\sqrt{a^2+4b};$$

en sorte que le système primitif est ramené à

$$(1)\qquad x-y=a,\qquad x+y=\sqrt{a^2+4b},$$

ou à

$$(2)\qquad xy=b,\qquad x+y=\sqrt{a^2+4b}:$$

c'est évidemment le groupe (1) qui doit être préféré.

SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

164. Soit proposé de résoudre les équations simultanées

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0.$$

Éliminons y^2 par la méthode de réduction ; en d'autres termes, ajoutons à la première équation multipliée par c' la seconde multipliée par $-c$; le résultat est de la forme

$$Ax^2+Bxy+Dx+Ey+F=0.$$

En substituant alors la valeur de y tirée de cette relation

$$y=-\frac{Ax^2+Dx+F}{Bx+E}$$

dans la première des équations proposées, on trouve une équation du 4e degré en x de la forme

$$Mx^4+Nx^3+Px^2+Qx+R=0,$$

et le système primitif est remplacé par le groupe

$$Mx^4+Nx^3+Px^2+Qx+R=0,$$
$$a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0.$$

Si l'équation du quatrième degré est bicarrée, ou si elle se réduit au

second degré, on saura la résoudre, et en substituant les valeurs de x ainsi obtenues dans l'autre équation, on aura les valeurs correspondantes de y.

Exemple :

$$8xy - 42y + 9 = 0,$$
$$4y^2 - 4xy + 9 = 0.$$

La première équation ne contient pas y^2; en la résolvant par rapport à y, et substituant la valeur

$$y = \frac{-9}{8x - 42}$$

dans la seconde, on obtient l'équation du second degré

$$4x^2 - 35x + 75 = 0$$

qui a deux racines réelles

$$x = 5 \quad \text{et} \quad x = \frac{15}{4}.$$

Les valeurs de y correspondantes sont

$$y = \frac{-9}{8.5 - 42} = \frac{9}{2}, \quad y = \frac{-9}{8.\frac{15}{4} - 42} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

ARTIFICES PARTICULIERS.

165. On préfère souvent les artifices indiqués dans le n° **163** à la méthode générale.

Exemple I.

$$x^2 + y^2 = a, \quad xy = b.$$

En ajoutant et retranchant ces deux équations, après avoir multiplié la seconde par 2, on trouve

$$(x + y)^2 = a + 2b, \quad (x - y)^2 = a - 2b,$$

d'où

$$x + y = \pm\sqrt{a + 2b}, \quad x - y = \pm\sqrt{a - 2b}.$$

Il y a donc quatre solutions :

1°. $$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(+\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}\right), \\ y = \frac{1}{2}\left(+\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}\right); \end{cases}$$

2°. $$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}\right), \\ y = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}\right); \end{cases}$$

3°. $$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}\right), \\ y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}\right); \end{cases}$$

4°. $$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}\right), \\ y = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}\right). \end{cases}$$

Les solutions 3 et 4 ne diffèrent pas en réalité de 1 et 2; en sorte qu'il n'y a au fond que deux systèmes de valeurs.

Exemple II.

$$xy + m(x+y) = a, \quad x^2 + y^2 + 2n(x+y) = b.$$

On ajoute à la seconde équation le double de la première, et l'on obtient

$$x^2 + y^2 + 2xy + (x+y)(2n+2m) = b + 2a,$$
$$(x+y)^2 + (2n+2m)(x+y) - b - 2a = 0,$$

d'où

$$x + y = -(m+n) \pm \sqrt{(m+n)^2 + b + 2a}.$$

On connaît donc $x+y$; par suite, en portant cette valeur dans la première des équations données, on aura xy: en sorte que x et y seront les racines d'une équation du second degré qu'on pourra écrire.

RÉSOLUTION DE QUELQUES SYSTÈMES REMARQUABLES.

166. Soient proposées les équations

$$x^4 + y^4 = a, \quad x + y = b.$$

Prenant la différence $x - y = z$ pour inconnue, on aura

$$x = \frac{b+z}{2}, \quad y = \frac{b-z}{2},$$

et la seule équation du problème sera

$$\left(\frac{b+z}{2}\right)^4 + \left(\frac{b-z}{2}\right)^4 = a.$$

ou

$$z^4 + 6b^2z^2 + b^4 - 8a = 0$$

et

$$z = \pm\sqrt{-3b^2 \pm \sqrt{8b^4 + 8a}}.$$

Le signe — du petit radical doit toujours être exclu comme ne pouvant donner lieu qu'à des racines imaginaires.

On peut encore prendre $xy = p$ pour inconnue auxiliaire; alors x et y sont les racines de l'équation

$$X^2 - bX + p = 0,$$

d'où

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - p}, \quad y = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - p};$$

et en portant ces valeurs dans

$$x^4 + y^4 = a,$$

on trouve une équation qui détermine p.

167. Soit le système

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = d^2;$$

on a

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

ou

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

et

$$x = \frac{ad}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$y = \frac{bd}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$z = \frac{cd}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Digitized by Google

168. Soient encore les équations

$$(x+y)(xy+1)=axy,$$
$$(x^2+y^2)(x^2y^2+1)=bx^2y^2.$$

En divisant la première par xy, et la seconde par x^2y^2, on obtient

$$(x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=a,$$

$$(x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)=b,$$

et en posant

$$x+\frac{1}{x}=u,\quad y+\frac{1}{y}=v,$$

on arrive au système connu (**163**)

$$u+v=a,\quad u^2+v^2=b+4.$$

Après avoir trouvé u et v, on a x et y par les équations

$$x+\frac{1}{x}=u,\quad y+\frac{1}{y}=v,$$

ou

$$x^2-ux+1=0,\quad y^2-vy+1=0.$$

169. Soit enfin pour dernier exemple le groupe

$$(x+y)(1+xy+x^2y+xy^2+x^2y^2)+xy=a,$$
$$xy(x+y)(x+y+xy)(x+y+xy+x^2y+xy^2)=b.$$

En posant successivement

$$x+y=t,\qquad xy=t',$$
$$t+t'=v,\qquad tt'=v',$$
$$v+v'=u,\qquad vv'=u',$$

on obtient

$$u+u'=a,\quad uu'=b,$$

ce qui montre que u et u' sont les racines de l'équation

$$U^2-aU+b=0;$$

u et u' étant connus, on aura v et v' par l'équation

$$V^2-uV+u'=0.$$

Puis on aura t et t' par la relation

$$T^2 - vT + v' = 0.$$

Et enfin l'équation

$$X^2 - tX + t' = 0$$

donnera x et y. x et y auront seize valeurs différentes.

EXERCICES.

I. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(x+y) = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a(x+y), \\ x^2 - xy + y^2 = b(x-y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(y^2 + \sqrt[3]{y^4 x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a, \\ 3\sqrt[3]{bxy} = b - x - y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = h, \\ (x+y+a)^2 + (x-y+a)^2 = k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = a, \\ x - y + x^2 - y^2 = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = a, \\ (x+y)(x^2+y^2) = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = p, \\ (b-y)z = p', \\ (a-x)(c-z) = p''. \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = k, \\ ax + a'y + a''z = 0, \\ bx + b'y + b''z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} axy + bx + cy + d = 0, \\ a'yz + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''xz + b''z + c''x + d'' = 0. \end{cases}$$

II. Décomposer l'équation $x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 1 = 0$ en deux équations du second degré.

III. Trouver deux nombres connaissant leur somme et le produit de la somme de leurs carrés par celle de leurs cubes.

Digitized by Google

CHAPITRE XIII.

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ.

QUESTION SUR LES PROPORTIONS.

170. *Trouver une proportion, connaissant la somme $4s$ de ses termes, la somme $4q$ de leurs carrés, et la somme $4c$ de leurs cubes.*

Prenons pour inconnues auxiliaires l'excès $4d$ de la somme des extrêmes sur la somme des moyens, et le produit p des extrêmes, qui est le même que celui des moyens. La somme des extrêmes sera $2(s+d)$, celle des moyens $2(s-d)$; en sorte que les extrêmes seront les racines de l'équation

$$x^2 - 2(s+d)x + p = 0,$$

et les moyens celles de l'équation

$$y^2 - 2(s-d)y + p = 0.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer p et d. Or la somme des carrés des racines des deux équations qui précèdent est

$$8(s^2+d^2) - 4p,$$

et celle des cubes

$$16s(s^2+3d^2) - 12sp;$$

on a donc les relations

$$2(s^2+d^2) - p = q, \quad 4s(s^2+3d^2) - 3sp = c,$$

d'où l'on tirera sans difficulté p et d.

Cet exemple est très-propre à faire sentir l'importance du choix des inconnues dans la résolution des problèmes.

DIVISION D'UNE DROITE EN MOYENNE ET EXTRÊME RAISON.

171. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire la partager en deux parties telles, que l'une d'elles soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.*

Soient a la ligne entière et x la plus grande partie. On doit avoir

$$(1) \qquad a(a-x) = x^2,$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

et

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5}).$$

La racine positive répond seule à l'énoncé. Pour interpréter la solution négative, on change x en $-x$ dans l'équation primitive ; la transformée

$$x^2 = a(a+x)$$

répond évidemment au problème suivant : *Trouver sur la ligne* AB *prolongée un point* X′ *tel, que la distance* AX′ *soit moyenne proportionnelle entre* X′B *et* AB; l'équation (1) résout donc le problème général : *Trouver sur la droite indéfinie* AB, un point tel, que sa distance *au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la longueur* AB.

Fig. 10.

Pour construire les valeurs de x, élevons au point B la perpendiculaire

$$BC = \frac{1}{2}a;$$

il en résulte

$$AC = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}, \quad x' = AC - BC, \quad x'' = AC + BC.$$

En décrivant alors de C comme centre avec BC pour rayon la demi-circonférence DBD′, puis en rabattant au moyen de deux arcs de cercle D en X, D′ en X′, on obtient

$$x' = AD = AX, \quad x' = AD' = AX';$$

X et X′ sont donc les points cherchés, et l'on retrouve la construction donnée en géométrie élémentaire.

172. Dans le problème précédent, l'équation admet plus de solutions réelles que l'énoncé, et nous avons pu modifier cet énoncé de façon que chaque solution de l'équation répondît à un cas du problème; cette *généralisation* n'est pas toujours possible.

Exemple :

Couper une sphère par un plan, de façon que le volume du segment soit égal au volume du cône qui aurait pour base la base du segment et pour sommet le centre de la sphère.

Soit x la distance du centre au plan sécant; le volume du segment est

$$\frac{1}{3}\pi r^2(r-x),$$

celui du cône

$$\frac{1}{3}\pi x(r^2-x^2),$$

et l'on a

$$x(r^2-x^2)=r^2(r-x)$$

ou

$$(x-r)(x^2+rx-r^2)=0.$$

En faisant abstraction de la racine $x=r$, qui donne un segment et un cône nuls, on n'a plus à considérer que l'équation du second degré

$$x^2+rx-r^2=0;$$

et si l'on remarque que cette équation est celle qu'on trouve quand on se propose de partager le rayon en moyenne et extrême raison de façon que le plus grand segment parte du centre, on voit qu'il y a deux solutions : l'une positive et inférieure à r, qui convient à la question, et l'autre négative et supérieure à r en valeur absolue, qui doit être rejetée, puisqu'elle indique un plan sécant qui ne coupe pas la sphère.

PROBLÈME DE PAPPUS.

173. *Par un point* M *pris sur la bissectrice d'un angle droit, mener une droite telle, que la partie interceptée entre cet angle ait une longueur donnée l.*

Le point M est déterminé quand on donne sa distance a aux côtés de l'angle droit.

Soient $OP = x$, $OQ = y$ les inconnues. L'aire du triangle rectangle POQ est égal à la somme des aires des triangles OMP, OMQ; de là l'équation

$$(1) \qquad xy = a(x+y);$$

on a d'ailleurs

$$l^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 2a(x+y);$$

d'où

$$(x+y)^2 - 2a(x+y) - l^2 = 0$$

et

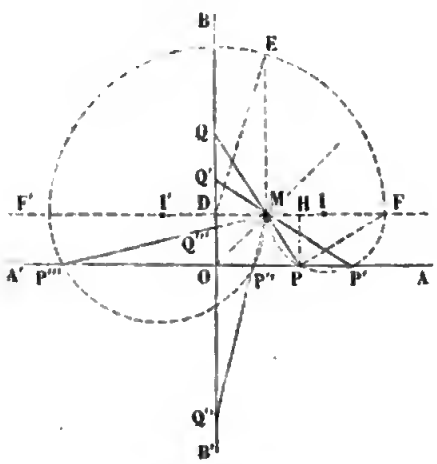
$$(2) \qquad x + y = a \pm \sqrt{a^2 + l^2};$$

x et y sont donc les racines de deux équations du second degré. Nous laissons au lecteur le soin de voir qu'il y a quatre solutions, dont deux sont toujours réelles, et dont les deux autres n'existent qu'autant que

$$l \text{ est} > 2a\sqrt{2} > 2\,\text{MO}.$$

Les racines négatives correspondent d'ailleurs à des segments comptés sur les prolongements des côtés de l'angle droit, à partir du sommet. Nous nous contenterons de montrer comment on construit x et y d'après les équations (1) et (2), sans les résoudre.

Fig. 11.



Prolongeons MC d'une longueur $ME = l$, et du point D comme centre avec DE pour rayon décrivons la demi-circonférence F'EF; on a

$$-FM = -(DF - DM) = a - \sqrt{a^2 + l^2},$$

$$MF' = DM + DF' = a + DF = a + \sqrt{a^2 + l^2};$$

en sorte que les deux valeurs de $x + y$ sont

$$-FM \quad \text{et} \quad MF'.$$

Considérons la seconde valeur

$$x + y = \mathrm{MF}' = 2a + \mathrm{MF}.$$

En appelant I le milieu de MF, on obtient

$$x + y = 2\,\mathrm{DI},$$

ce qui conduit à poser

$$x = \mathrm{DI} + z, \qquad y = \mathrm{DI} - z;$$

d'où

$$xy = \overline{\mathrm{DI}}^2 - z^2,$$

$$2a\,\mathrm{DI} = \overline{\mathrm{DI}}^2 - z^2$$

et

$$z^2 = \overline{\mathrm{DI}}^2 - 2a\,\mathrm{DI} = (a + \mathrm{MI})^2 - 2a(a + \mathrm{MI})$$
$$= \overline{\mathrm{MI}}^2 - a^2 = \overline{\mathrm{IH}}^2,$$

en désignant par H le pied de la perpendiculaire abaissée sur DF du point P où le côté OA est coupé par la circonférence décrite sur MF comme diamètre; on a ainsi les deux solutions

$$\mathrm{PQ} \quad \text{et} \quad \mathrm{P'Q'}.$$

La demi-circonférence décrite sur MF′ comme diamètre donnerait les deux autres solutions

$$\mathrm{P''Q''}, \quad \mathrm{P'''Q'''}.$$

Si la longueur l est moindre que 2 MO, la circonférence MF ne coupe pas AO, et les solutions

$$\mathrm{PQ}, \quad \mathrm{P'Q'}$$

n'existent plus.

CONE CIRCONSCRIT A LA SPHÈRE.

174. *Circonscrire à une sphère donnée un cône droit de surface totale donnée.*

En désignant par R le rayon de la sphère, par πa^2 la surface donnée, et appelant x le rayon de la base du cône, y la hauteur de

ce cône et z son apothème, on a facilement

$$(1) \qquad x(x+z)=a^2,$$

$$(2) \qquad \frac{x}{R}=\frac{z}{y-R},$$

$$(3) \qquad \frac{x}{R}=\frac{y}{\sqrt{y(y-2R)}}.$$

En portant dans (1) la valeur de z tirée de la relation (2), on trouve

$$\frac{x^2y}{R}=a^2,$$

qui, à cause de (3), devient

$$(4) \qquad \frac{Ry^2}{y-2R}=a^2 \quad \text{ou} \quad y\left(\frac{a^2}{R}-y\right)=2a^2.$$

La somme des deux facteurs du premier membre est $\frac{a^2}{R}$ et leur produit $2a^2$; en sorte que la hauteur y du cône s'obtient en construisant un rectangle dont la somme des dimensions soit $\frac{a^2}{R}$ et dont la surface sera égale à $2a^2$, ce qui est un problème connu.

L'équation (4), qu'on peut écrire sous la forme

$$Ry^2-a^2y+2Ra^2=0,$$

montre que y n'est réel qu'autant que

$$a^4-8R^2a^2>0,$$
$$a^2>8R^2.$$

Le minimum de la surface du cône circonscrit est donc égal à $8R^2$, et l'on a alors

$$y=\frac{a^2}{2R}=4R,$$
$$z=3x=3R\sqrt{2}.$$

Le cône droit de surface totale minimum, circonscrit à une sphère, jouit donc des propriétés suivantes :

1°. Sa hauteur est double du diamètre de la sphère;

2°. Son apothème est triple du rayon de sa base;

3°. Sa surface est double de la surface de la sphère et, par suite, son volume est aussi double de celui de la sphère.

SUR LE TRIANGLE RECTANGLE.

175. *Trouver les côtés x, y, z d'un triangle rectangle dont on donne le périmètre $2p$ et la surface m^2.*

Les équations du problème sont évidentes :

$$x + y + z = 2p, \tag{1}$$

$$xy = 2m^2, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{3}$$

En portant dans l'équation (3) la valeur de z tirée de l'équation (1), et remplaçant xy par $2m^2$, on trouve

$$p^2 - p(x+y) + m^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + y = \frac{p^2 + m^2}{p};$$

x et y sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - \frac{p^2 + m^2}{p} X + 2m^2 = 0, \tag{4}$$

et z est égal à

$$z = 2p - (x+y) = 2p - \frac{p^2 + m^2}{p} = \frac{p^2 - m^2}{p};$$

z est toujours réel : pour qu'il soit positif, il faut qu'on ait

$$p^2 > m^2. \tag{5}$$

D'ailleurs les racines de l'équation (4) sont positives, si elles sont réelles, c'est-à-dire si l'on a

$$p^4 - 6m^2 p^2 + m^4 > 0.$$

Les conditions de possibilité se réduisent donc aux deux inégalités précédentes.

Or, pour que la dernière inégalité soit remplie, il faut que p^2 ne soit pas compris entre les deux racines

$$m^2(3 \pm 2\sqrt{2})$$

de l'équation

$$p^4 - 6m^2p^2 + m^4 = 0;$$

de là les conditions

$$p^2 > m^2(3 + 2\sqrt{2}), \quad p^2 < m^2(3 - 2\sqrt{2}),$$

dont la dernière est inadmissible, comme étant incompatible avec la formule (5), on a donc seulement

$$p > m\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad p > m(1 + \sqrt{2}),$$

que l'on peut encore écrire

$$m < \frac{p}{1 + \sqrt{2}} < p(\sqrt{2} - 1).$$

Si donc m est donné, le minimum de p est

$$m(1 + \sqrt{2}),$$

et si p est donné, le maximum de m est

$$p(\sqrt{2} - 1).$$

Dans les deux cas, on a

$$p = m(1 + \sqrt{2}), \qquad x = \frac{m(2 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} = m\sqrt{2},$$

$$y = m\sqrt{2}, \qquad z = 2m;$$

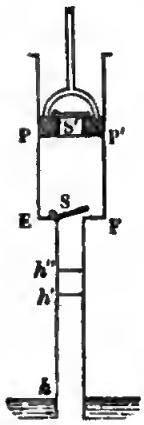
en sorte qu'on peut énoncer ce théorème :

Le triangle rectangle isocèle est, de tous les triangles rectangles de même périmètre, celui qui a la plus grande surface, et, de tous les triangles rectangles de même surface, celui qui a le plus petit périmètre.

PROBLÈME SUR LES POMPES.

176. *On commence à faire mouvoir le piston d'une pompe aspirante; trouver à quelle hauteur s'élèvera l'eau dans le tuyau d'aspiration après le premier, le second, . . . coup de piston. Combien faudra-t-il de coups de piston pour élever l'eau jusqu'à la soupape d'aspiration?*

Fig. 12.



Soient

B la section du corps de pompe;

L la hauteur EP à laquelle s'élève le piston;

ω la section du tuyau d'aspiration;

l la longueur hs de ce tuyau;

H la hauteur de la colonne d'eau qui fait équilibre à la pression atmosphérique;

x la hauteur hh' que l'eau a atteinte après un certain nombre de coups de piston;

x_1 la hauteur hh'' à laquelle un nouveau coup de piston la fera parvenir.

Quand l'eau s'est arrêtée en h', le piston était en P; la soupape S s'est fermée par son propre poids, et l'on a abaissé le piston jusqu'en E. Alors l'air qui a pour volume

$$(l - x)\omega,$$

a une élasticité proportionnelle à

$$H - x,$$

puisqu'il fait équilibre à la pression atmosphérique diminuée de la colonne d'eau hh'.

Lorsque le piston s'élève en P, l'eau vient en h'', et la masse d'air considérée occupe le volume

$$BL + \omega(l - x_1);$$

son élasticité est d'ailleurs proportionnelle à

$$H - x_1.$$

La loi de Mariotte donne donc

$$(H - x)(l - x)\omega = (H - x_1)[BL + \omega(l - x_1)]$$

ou

$$x_1^2 - \left(\frac{B}{\omega}L + l + H\right)x_1 + \frac{B}{\omega}HL + (H + l)x - x^2 = 0$$

et

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{\omega}L + l + H\right)$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(H - l - \frac{B}{\omega}L\right)^2 + L(H - x)(l - x)}.$$
$$+4(H-x)(l-x)$$

11.

Les deux racines sont réelles, car H étant supérieur à x, le produit

$$(H - x)(l - x)$$

est positif; celle qui correspond au signe + du radical est plus grande que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{B}{\omega}L + l + H\right) + \frac{1}{2}\left(H - l - \frac{B}{\omega}L\right),$$

c'est-à-dire plus grande que H. Elle ne convient donc pas, puisque l'eau ne peut évidemment s'élever à une hauteur supérieure à H; le radical doit donc avoir le signe —.

Cela posé, l'équation

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{\omega}L + l + H\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{B}{\omega}L - l - H\right)^2 + L(H - x)(l - x)},$$

permet de calculer de proche en proche les hauteurs auxquelles les coups de piston successifs élèvent l'eau.

Pour trouver la hauteur due au premier coup de piston, on fait $x = 0$; puis, en multipliant x par la hauteur ainsi trouvée, on a la hauteur due aux deux premiers coups, etc.

On s'arrêtera dès qu'on aura trouvé une hauteur supérieure à l.

PROBLÈME DU PUITS.

177. *Calculer la profondeur d'un puits, sachant qu'il s'est écoulé un nombre t de secondes entre l'instant où l'on a lâché une pierre, et celui où le bruit qu'elle a fait en frappant le fond est parvenu à l'oreille.*

Soit x la profondeur du puits évaluée en mètres; le temps t se compose du temps t_1 de la chute, et du nombre de secondes t_2 que le son met à remonter; en sorte qu'on a

$$t = t_1 + t_2, \quad x = \frac{1}{2}g t_1^2, \quad x = v t_2,$$

v étant la vitesse du son, et g l'intensité de la pesanteur.

Digitized by Google

L'équation du problème est donc

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v}$$

ou

$$(1) \qquad t - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}},$$

et en élevant au carré et réduisant,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{v^2} - x\left(\dfrac{2t}{v} + \dfrac{2}{g}\right) + t^2 = 0, \\ x = \dfrac{\dfrac{t}{v} + \dfrac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\dfrac{t}{v} + \dfrac{1}{g}\right)^2 - \dfrac{t^2}{v^2}}}{\dfrac{1}{v^2}}. \end{array} \right.$$

On voit que les racines sont toutes deux réelles et positives; celle qui correspond au signe + du radical doit être rejetée, car elle est plus grande que

$$\frac{\dfrac{t}{v}}{\dfrac{1}{v^2}} = vt;$$

ce qui est absurde.

On a introduit cette racine étrangère en élevant au carré l'équation (1); la relation (2) équivaut à la fois aux deux équations

$$t - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \quad t - \frac{x}{v} = -\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

dont la première répond seule à l'énoncé; c'est à elle, en effet, que correspond le signe — du radical, puisque, d'après cette équation, on a

$$t - \frac{x}{v} > 0; \quad \text{d'où} \quad x < vt.$$

PROBLÈME DE CLAIRAUT.

178. *Trouver sur la droite* XY *qui joint deux points lumineux* A *et* B, *le point qui est également éclairé.*

Soient $AC = x$ la distance du point cherché C au point lumineux A; α^2 la quantité de lumière que recevrait de A un point situé à 1 mètre de distance de ce point lumineux; β^2 la quantité de lumière que recevrait de B un point situé à 1 mètre de ce point lumineux.

La quantité de lumière reçue étant en raison inverse du carré de la distance, le point C recevra du point A une quantité de lumière égale à

$$\frac{\alpha^2}{x^2},$$

et du point B une quantité de lumière exprimée par

$$\frac{\beta^2}{(d-x)^2},$$

d étant la distance AB qui sépare les deux points lumineux.

L'équation du problème est donc

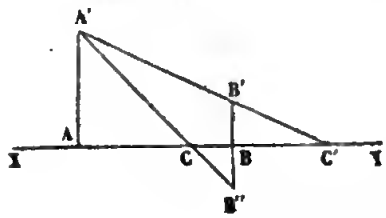
$$\frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{\beta^2}{(d-x)^2}$$

ou

$$\frac{\alpha}{x} = \pm\frac{\beta}{d-x}.$$

Élevons au point A une perpendiculaire égale à α, et au point B deux perpendiculaires, l'une en dessus, l'autre en dessous, et égales à β; les droites A′B′, A′B″ couperont XY en C′ et C, qui seront les points demandés; car on a

Fig. 13.



$$\frac{AA'}{AC} = \frac{BB''}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{d-x},$$

$$\frac{AA'}{AC'} = \frac{BB'}{BC'} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{x-d} = -\frac{\beta}{d-x}.$$

Cette construction montre qu'il y a deux points C et C′ qui satisfont à la question; l'un C est compris entre A et B et situé plus près de la lumière la plus faible; l'autre C′ est au delà de cette dernière lumière. Quand les deux lumières ont la même intensité, l'une des solutions devient infinie, et il n'y a sur la droite XY qu'un point également éclairé; c'est le milieu de AB. Tous ces résultats sont évidents *a priori* d'après l'énoncé; on peut aussi les déduire de l'équation.

C'est Albert Girard (1629) qui a donné la première interprétation des solutions négatives; la Géométrie de Descartes n'a paru qu'en 1637.

EXERCICES.

I. Un polygone a 240 diagonales, quel est le nombre de ses côtés?

II. Un triangle isocèle abc est donné, $ab = ac = 10$, $bc = 12$; trouver sur ab un point d, sur ac un point g, et sur bc deux points e, f, tels, que le pentagone $adefg$ soit équilatéral.

III. Une personne qui a emprunté une somme a pour deux ans, s'acquitte de cette dette par deux paiements de b francs faits à la fin de la première année et de la seconde. A quel taux avait-elle emprunté?

IV. Deux fontaines coulent dans un même bassin successivement, la première pendant une fraction $\frac{m}{n}$ du temps que la seconde mettrait seule à le remplir. Alors on l'arrête, et on laisse couler la deuxième jusqu'à ce que le bassin soit rempli. Si les deux fontaines avaient coulé ensemble, la première n'aurait donné qu'une fraction $\frac{p}{q}$ de ce qu'a fourni la deuxième, et le bassin eût été rempli t heures plus tôt. On demande le temps que chaque fontaine coulant seule mettrait à remplir le bassin?

V. Trouver les termes d'une proportion, connaissant :

La différence des moyens, celle des extrêmes, et la somme des carrés des quatre termes;

Ou, le produit des moyens, la différence entre la somme des extrêmes et celle des moyens, et la somme des carrés des quatre termes;

Ou, la somme des extrêmes, celle des moyens, et la somme des cubes des quatre termes;

Ou, l'excès de la somme des extrêmes sur celle des moyens, l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur celle des carrés des moyens, l'excès de la somme des cubes des extrêmes sur la somme des cubes des moyens.

VI. Résoudre et construire le quadrilatère dont on connaît : 1° une diagonale; 2° les angles qui ont leurs sommets aux extrémités de cette diagonale; 3° la projection des deux autres sommets sur cette diagonale. Cas où les angles donnés sont droits.

VII. Divisez le diamètre AB d'un cercle O en n parties égales; de A et B comme centres et avec AB pour rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en C; joignez C à la deuxième division du diamètre; cette ligne prolongée coupera la circonférence en D; l'arc BD est sensiblement égal à la $n^{ième}$ partie de la circonférence. Calculer le cosinus de l'angle BOD; la construction est exacte pour $n = 3, 4, 6$.

VIII. Calculer les rayons x, y, z de trois cercles inscrits dans un triangle et tangents entre eux. Si A, B, C, O sont les trois sommets et le centre du cercle inscrit, et A′, B′, C′ les points de contact de ce cercle situés respectivement sur BC, AC, AB, on trouve

$$2\sqrt{xy} = CO + OA' - CA', \quad 2\sqrt{xz} = BO + OC' - BC',$$
$$2\sqrt{yz} = AO + OB' - AB'.$$

CHAPITRE XIV.

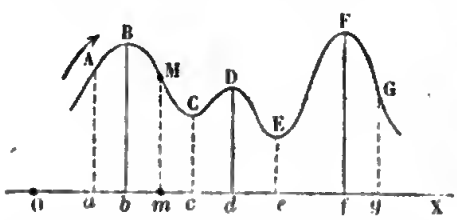
QUELQUES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

MÉTHODE GÉNÉRALE.

179. La valeur d'une expression algébrique en x dépend du nombre qu'on met à la place de la *variable* x; et il peut arriver que, lorsque x croît peu à peu à partir d'un certain nombre, l'expression soit tantôt croissante et tantôt décroissante; chaque passage de l'un à l'autre sens est alors marqué par un état *maximum* si l'expression cesse de croître pour diminuer, ou par un état *minimum* si l'expression cesse de décroître pour augmenter. Ces états critiques sont alternatifs, et une expression peut posséder à la fois plusieurs maximums et plusieurs minimums. D'après cela, une valeur maximum n'est pas nécessairement supérieure à toutes les valeurs de l'expression considérée; il suffit qu'elle surpasse celles qui la précèdent et celles qui la suivent immédiatement. Une observation analogue convient au minimum.

Par exemple : pendant qu'un mobile M parcourt la ligne ABCDEFG dans le sens de la flèche, sa projection m sur l'axe OX s'éloigne d'un point fixe O de cette droite; la distance du mobile à OX est une grandeur Mm qui dépend de l'espace variable $x = Om$ qui sépare sa projection du point O; cette distance est maximum pour $x = Ob$, Od, Of, et minimum pour $x = Oc$, Oe.

Fig. 14.



On voit, d'ailleurs, qu'*on n'altère pas la valeur de x qui rend une expression maximum ou minimum en multipliant ou divisant cette expression par un facteur indépendant de x*; cela revient à augmenter ou à diminuer dans un rapport constant les distances des divers points de la courbe ABCDEFG à la droite fixe OX.

Cette remarque est très-utile : avant de chercher dans quelles circonstances une expression donnée est maximum ou minimum, il faut toujours débarrasser cette expression des facteurs *constants* qu'elle contient.

L'Algèbre élémentaire considère la recherche des valeurs maximums ou minimums, comme un cas particulier de la question qui consiste à faire acquérir à l'expression proposée une valeur quelconque. On égale cette expression à une quantité indéterminée y; et s'il résulte de la discussion de l'équation ainsi obtenue que x n'est pas réel pour toutes les valeurs de y; si l'on trouve, par exemple, que

$$\begin{array}{lll} x \text{ est imaginaire pour} & y < a, \\ \text{réel. . . . .} & y \begin{array}{l} > a, \\ < b, \end{array} \\ \text{imaginaire} & y \begin{array}{l} > b, \\ < c, \end{array} \\ \text{réel. . . . .} & y \begin{array}{l} > c, \\ < d, \end{array} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

on doit conclure que les valeurs $b, d, \ldots$ sont des maximums de y, et les valeurs $a, c, \ldots$ des minimums.

De là cette règle pratique : *Égalez à y l'expression proposée, après l'avoir débarrassée de ses facteurs constants; exprimez que l'équation en x ainsi obtenue a ses racines réelles; ces conditions assujettiront y à rester entre certaines limites qui seront précisément les maximums et les minimums cherchés.*

Voici quelques exemples de cette méthode, que nous avons d'ailleurs employée déjà dans le chapitre précédent.

MINIMUM DU VOLUME DU CONE CIRCONSCRIT A LA SPHÈRE.

180. Soient x la hauteur et z le rayon de la base du cône circonscrit à une sphère de rayon r; le volume de ce cône a pour expression

$$\frac{1}{3} x . \pi z^2 ;$$

d'ailleurs les triangles semblables donnent

$$\frac{z}{r} = \frac{x}{\sqrt{(x-r)^2 - r^2}};$$

le volume à rendre minimum est donc

$$\frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{x^2}{x - 2r};$$

on pose

$$\frac{x^2}{x-2r} = y, \quad \text{d'où} \quad x^2 - yx + 2ry = 0.$$

Pour que cette équation ait ses racines réelles, il faut que y soit plus grand que $8r$; le cône minimum a donc un volume

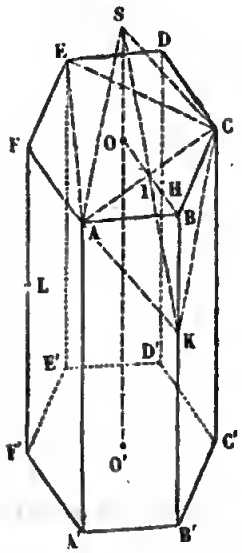
$$\frac{8}{3}\pi r^3,$$

double du volume de la sphère inscrite, et sa hauteur $\frac{y}{2} = 4r$ est égale à deux fois le diamètre de cette sphère : c'est donc aussi le cône à surface totale minimum (**174**).

ALVÉOLE DES ABEILLES.

181. *Soit* S *un point pris sur le prolongement de l'axe* OO′ *d'un prisme droit* ABCDEFA′B′C′D′E′F′ *à base hexagonale régulière; par ce point et par les côtés du triangle équilatéral* ACE *obtenu en joignant de deux en deux les sommets de la base supérieure, on mène trois plans qui détachent du prisme trois tétraèdres* BACK, DCEH, FEAL, *et les remplacent par un tétraèdre unique* SACE *placé au-dessus du prisme.* Le solide ainsi formé est terminé, à sa partie supérieure, par un hexagone gauche composé de trois lozanges SAKC, SCHE, SELA; son volume est indépendant de la position du point S sur l'axe; il est toujours égal au volume du prisme, car la pyramide

Fig. 15.



ajoutée SACE se compose de trois pyramides SOAC, SOCE, SOEA, qui sont respectivement égales aux trois pyramides détachées. *Il s'agit de trouver la hauteur du point* S *qui rend minimum la surface de ce décaèdre.*

Prenons pour unité la moitié du côté AB de l'hexagone; désignons par h la hauteur du prisme et par x la hauteur inconnue du sommet S au-dessus du plan de la base supérieure. On a

$$A'I = \frac{1}{2} AB\sqrt{3} = \sqrt{3}, \qquad SI = \sqrt{\overline{SO}^2 + \overline{OI}^2} = \sqrt{x^2+1},$$

et comme la surface considérée se compose de six trapèzes égaux à A'KBA et de six triangles égaux à SAK, la quantité à rendre minimum a pour expression

$$2h - x + \sqrt{3}\sqrt{x^2+1}.$$

En l'égalant à $2h + y$, on a successivement

$$3(x^2+1) = (x+y)^2, \qquad 2x^2 - 2yx + 3 - y^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$y^2 - 2(3 - y^2) > 0, \qquad \text{ou} \qquad y > \sqrt{2};$$

la surface est donc susceptible d'un minimum, et ce minimum a lieu pour

$$x = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{ou} \qquad OS = \frac{AB\sqrt{2}}{4},$$

c'est-à-dire *lorsque la différence des deux arêtes consécutives* AA', BB' *est égale au quart de la diagonale du carré construit sur le côté de l'hexagone.*

Les trois angles plans de l'angle trièdre K sont alors égaux; leur valeur commune est de 109° 28′ 16″ environ; les trois dièdres sont égaux chacun à 120 degrés.

Les alvéoles des abeilles sont des décaèdres à surface minimum semblables à celui que nous venons de décrire; l'hexagone est l'entrée de l'alvéole; le miel est déposé dans le fond; les abeilles construisent d'abord les losanges, puis les faces trapèzes. Qu'on se figure un plan rempli par des hexagones, et qu'on construise

Digitized by Google

sur chaque hexagone un alvéole, les sommets se trouveront dans un plan parallèle au premier. Enfin, qu'on place cette figure sur une autre pareille, de façon que les sommets s'enchevêtrent, on aura un ensemble de cellules qui portent le nom de *rayon*. La *ruche* se compose d'un certain nombre de rayons juxtaposés, de façon que deux mouches puissent passer à la fois entre deux rayons consécutifs.

Ainsi : 1° l'inclinaison des trois losanges qui forment le fond de l'alvéole est telle, que la surface soit minimum ; 2° le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier sont les seuls polygones réguliers qui, pris isolément, puissent remplir un espace plan sans laisser de vide, et de ces trois polygones, l'hexagone pour la même aire a le moindre contour. Il y a donc double économie de cire.

La construction géométrique des alvéoles, remarquée par Pappus, géomètre du IVe siècle avant Jésus-Christ, a été étudiée d'une manière précise d'abord par Philippe Maraldi à l'Observatoire (1712), puis par Réaumur, qui proposa la question du minimum à Samuel Kœnig et à Maclaurin. C'est à ce dernier géomètre qu'on doit la première solution théorique exacte. Kœnig n'avait trouvé que 109° 26′, au lieu de 109° 28′ 16″ pour l'angle du losange.

MAXIMUM DE L'EXPRESSION $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$.

182. On pose

$$(1)\qquad \frac{ax^2+bx+c}{ax^2+b'x+c'}=y;$$

la condition de réalité des racines de l'équation

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'y=0$$

est

$$(2)\quad y^2(b'^2-4a'c')+y(4ac'+4a'c-2bb')+b^2-4ac>0.$$

Il y a trois cas à distinguer :

1°. Si $b'^2-4a'c'$ est positif, la condition (2) est remplie pour toutes les valeurs de y non comprises entre les racines de

l'équation

$$(3)\quad y^2(b'^2 - 4a'c') + y(4ac' + 4a'c - 2bb') + b^2 - 4ac = 0.$$

En d'autres termes, y pourra prendre toutes les valeurs possibles, et n'admettra ni maximum ni minimum quand les racines de l'équation (3) seront imaginaires, ou réelles et égales, et il aura pour limites les racines de cette équation quand ces racines seront réelles et inégales.

2°. Si $b'^2 - 4a'c'$ est nul, l'inégalité (2) se réduit au premier degré, c'est-à-dire est de la forme

$$my + n > 0;$$

en sorte que y aura un maximum ou un minimum égal à

$$-\frac{n}{m},$$

suivant que m sera négatif ou positif. D'ailleurs il n'y aura ni maximum ni minimum si m est nul.

3°. Si $b'^2 - 4a'c'$ est négatif, la condition (2) sera satisfaite pour toutes les valeurs de y comprises entre les racines de l'équation (3). D'ailleurs *cette équation a toujours alors ses racines réelles,* puisque sans cela y ne pourrait prendre aucune valeur, ce qui est inadmissible d'après l'équation (1); donc y n'aura ni maximum ni minimum lorsque les racines seront égales, et il aura pour limites les racines lorsqu'elles seront inégales.

Exemple. Soit

$$y = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x + 2},$$

la condition (2) est ici

$$y^2 + 14y + 1 > 0:$$

or l'équation

$$y^2 + 14y + 1 > 0$$

admet les deux racines réelles $-13{,}928$, $-0{,}072$; on doit donc avoir

$$y > -0{,}072, \qquad y < -13{,}928,$$

et l'on voit que y a un maximum égal à $-13{,}928$ et un minimum à $-0{,}072$.

La formule

$$x = \frac{7 - 3y}{2(1 - y)}$$

donne pour les valeurs correspondantes de x, 1,63, 3,36.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

183. Théorème I. — *Le maximum du produit de deux facteurs variables x et y dont la somme est constante a lieu quand les facteurs sont égaux.*

En effet, l'identité

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

montre que $x + y$ étant constant, xy sera maximum quand $x - y$ sera nul, c'est-à-dire quand x sera égal à y.

Inversement, la somme de deux nombres dont le produit xy est constant, est minimum quand ces nombres sont égaux.

Car l'identité précédente, mise sous la forme

$$(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2,$$

fait voir que, xy étant constant, la plus petite valeur de $x + y$ correspond à $x - y = 0$, c'est-à-dire à $x = y$.

184. Théorème II. — *Le maximum du produit $xyzuv\ldots$ de n facteurs positifs dont la somme est constante a lieu quand tous ces facteurs sont égaux entre eux.*

Soit, en effet,

$$abcd\ldots kl$$

ce maximum. Si deux facteurs quelconques b et c étaient inégaux, en les remplaçant par leur moyenne arithmétique

$$\frac{b + c}{2},$$

on obtiendrait un nouveau produit

$$a\,\frac{b + c}{2}\,\frac{b + c}{2}\,d\ldots kl,$$

dont les facteurs auraient la même somme que ceux du premier

et qui serait plus grand que le premier, puisque

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2}$$

est plus grand que bc.

185. Scolie. — Le théorème subsiste lorsque tous les facteurs sont négatifs et qu'ils sont en nombre pair; car le produit

$$ad \ldots kl$$

est encore positif, et, par suite, l'inégalité

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} > bc$$

entraîne encore

$$a \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot d \ldots kl > abcd \ldots kl.$$

Lorsque tous les facteurs sont négatifs et qu'ils sont en nombre impair, le produit

$$ad \ldots kl$$

est négatif, et l'inégalité

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} > bc$$

entraîne

$$a \frac{b+c}{2} \frac{b+c}{2} d \ldots kl < abcd \ldots kl,$$

c'est-à-dire qu'on a alors un *minimum*.

186. Théorème III. — *L'expression*

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots,$$

dans laquelle $x, y, z, \ldots$ sont des nombres positifs dont la somme est constante, est maximum lorsqu'on a

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \ldots.$$

Le produit

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$$

est, en effet, maximum dans les mêmes circonstances que l'expression

$$\frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma \ldots};$$

mais cette expression peut être considérée comme le produit des $\alpha + \beta + \gamma \ldots$ facteurs

$$\overbrace{\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha}, \ldots,}^{\alpha} \quad \overbrace{\frac{y}{\beta}, \frac{y}{\beta}, \ldots,}^{\beta} \quad \overbrace{\frac{z}{\gamma}, \frac{z}{\gamma}, \ldots,}^{\gamma}$$

dont la somme

$$\alpha \frac{x}{\alpha} + \beta \frac{y}{\beta} + \gamma \frac{z}{\gamma} + \ldots \quad \text{ou} \quad x + y + z + \ldots$$

est constante; elle sera donc maximum quand ces facteurs seront égaux, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots = \frac{x + y + z + \ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots} = \frac{a}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots},$$

en désignant par a la somme donnée; on en déduit

$$x = \frac{a\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots},$$

$$y = \frac{a\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots},$$

$$z = \frac{a\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}, \ldots.$$

187. Théorème IV. — *Si, une quantité* X *étant donnée, une autre quantité* Y *est maximum dans certaines circonstances, réciproquement,* Y *étant donnée,* X *sera minimum dans les mêmes circonstances; pourvu que la valeur maximum de* Y *diminue lorsque la valeur donnée de* X *diminue.*

En effet, désignons par A la valeur donnée de X, par B la valeur maximum correspondante de Y, et par A′ un nombre quelconque moindre que A; par hypothèse, le maximum de Y correspondant à X = A′ est moindre que B. Donc X est au moins égal à A quand Y est égal à B.

Scolie. — Ce théorème comprend les réciproques des propositions II et III.

Le minimum de la somme de plusieurs nombres positifs dont le produit est constant a lieu lorsque ces nombres sont égaux.

Le minimum de la somme de plusieurs nombres positifs x, y, z,.. , qui rendent l'expression

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots$$

constante, a lieu pour

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots.$$

APPLICATIONS DU THÉORÈME I.

188. Il résulte immédiatement de la proposition I, qu'*un rectangle xy, de périmètre donné $2(x+y)$, est maximum lorsque ses dimensions sont égales, c'est-à-dire lorsqu'il devient un carre.* Par suite, *le carré est de tous les rectangles de même surface celui qui a le plus petit périmètre.*

De même, *parmi tous les triangles rectangles dans lesquels la somme $x+y$ des côtés de l'angle droit est constante, le triangle isocèle est celui dont l'aire $\frac{1}{2}xy$ est maximum; et de tous les triangles rectangles de même surface, le triangle isocèle est celui dans lequel la somme des côtés de l'angle droit est la plus petite.*

189. *Parmi tous les triangles de même base a et de même périmètre $2p$, le triangle isocèle est un maximum.*

La formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

montre, en effet, que, p et $p-a$ étant constants, S est maximum pour

$$p-b = p-c,$$

c'est-à-dire pour $b=c$, puis que les facteurs $p-b$ et $p-c$ ont une somme constante

$$2p-b-c = a+b+c-b-c = a.$$

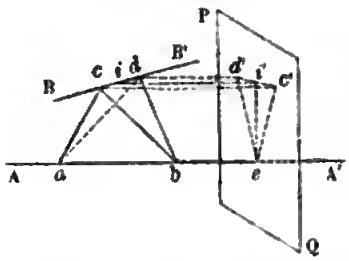
Inversement, *si la base d'un triangle dont le sommet est fixe,*

glisse sans changer de longueur sur une droite donnée, le périmètre du triangle est minimum, lorsque le triangle est isocèle, c'est-à-dire lorsque le sommet fixe se projette sur le milieu de la base.

190. *Sur une première droite* AA′ *sont situés deux points fixes* a, b; *sur une seconde droite* BB′ *glisse un segment* cd *de longueur constante; on demande la position du segment* cd *qui correspond au minimum de l'aire de la pyramide* $abcd$.

Les aires aed, bed sont constantes; il s'agit donc de rendre minimum la somme des aires eab, dab, ou bien la somme des perpendiculaires abaissées de c et d sur AA′. Projetons la figure sur un plan PQ normal à AA′; la distance $e'd'$, projection de ed, est constante, et ed', ec' sont égales aux perpendiculaires menées de c et d sur AA′; or d'après le problème précédent $ec' + ed'$ est le minimum, lorsque le milieu i' de $c'd'$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de e sur $c'd'$; alors ei' est la projection de la plus courte distance des droites fixes AA′, BB′. Donc l'aire de la pyramide $abcd$ est minimum, lorsque le milieu de cd est le point où la plus courte distance entre AA′ et BB′ rencontre BB′.

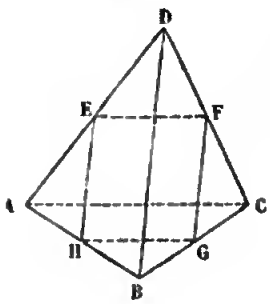
Fig. 16.



191. *Couper un tétraèdre* ABC *par un plan parallèle aux deux arêtes opposées* AC, BD, *de façon que la section* EFGH *soit un minimum.*

La section est évidemment un parallélogramme dans lequel l'angle HGF est égal à l'angle des arêtes AC, BD; elle sera donc maximum en même temps que le rectangle dont les deux dimensions sont HG et GF; or on a

Fig. 17.



$$\frac{HG}{AC} = \frac{BG}{BC},$$

$$\frac{GF}{BD} = \frac{GC}{BC},$$

et, par suite,

$$HG.GF = \frac{AC.BD}{\overline{BC}^2} \cdot BG.GC.$$

Le facteur $\frac{AC.BD}{\overline{BC}^2}$ étant constant, il faut rendre maximum le produit BG.GC des deux segments de l'arête CB; le maximum aura donc lieu pour

$$BG = GC,$$

c'est-à-dire lorsque le plan de la section sera mené à égale distance des deux arêtes AC, BD.

APPLICATIONS DU THÉORÈME II.

192. *Le cube est de tous les parallélipipèdes rectangles de même surface celui qui a le plus grand volume.*

En effet, en désignant par x, y, z, les trois arêtes, la surface et le volume du parallélipipède ont pour expression

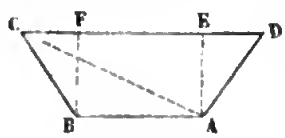
$$2(xy + xz + yz) \quad \text{et} \quad xyz.$$

Or xyz est maximum en même temps que $x^2y^2z^2$, lequel est le produit des trois facteurs xy, xz, yz, dont la somme est donnée; il acquiert donc sa plus grande valeur pour

$$xy = xz = yz, \quad \text{ou} \quad x = y = z.$$

193. *Maximum de l'aire d'un trapèze isocèle* ABCD, *dont la petite base* AB $= a$ *et la longueur commune* c *des deux côtés* BC, AD *non parallèles restent constantes.*

Fig. 18.



Soit x la plus grande base CD; l'aire du trapèze a pour expression

$$\frac{x+a}{2}\sqrt{c^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+a)^2(x+2c-a)(2c+a-x)}.$$

Elle est donc maximum en même temps que le produit

$$(1) \qquad \frac{x+a}{\alpha} \cdot \frac{x+a}{\alpha} \cdot \frac{x+2c-a}{6} \cdot \frac{2c+a-x}{},$$

où α, β, γ sont des nombres arbitraires. Si l'on détermine α, β, γ, de façon que le coefficient de x soit nul dans la somme des quatre facteurs qui précèdent, c'est-à-dire de façon qu'on ait

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = 0,$$

le produit (1) sera maximum lorsque les facteurs seront égaux, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$\frac{x+a}{\alpha} = \frac{x+2c-a}{\beta} = \frac{2c+a-x}{\gamma}.$$

L'élimination de $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ entre les trois équations qui précèdent donne

$$(2) \qquad x^2 - ax - 2c^2 = 0$$

dont la racine positive

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

est la plus grande des deux bases du trapèze cherché. Les quatre côtés du trapèze étant déterminés, il sera facile de le construire et d'exprimer l'aire en fonction des données a, c.

Nous ferons seulement remarquer que l'équation (2), mise sous la forme

$$x \cdot \frac{x-a}{2} = c^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{CD} \times \mathrm{DE} = \overline{\mathrm{AD}}^2,$$

prouve que le triangle CAD est rectangle en A; CD est donc le diamètre du cercle circonscrit au trapèze.

Pour $c = a$, on a $x = 2a$; les côtés BC, AB, AD, sont égaux au rayon du cercle circonscrit au trapèze, et chacun des angles DAB, ABC vaut 120 degrés.

Cette ingénieuse méthode qui consiste à multiplier ou diviser par des nombres arbitraires qui sont déterminés ensuite, de façon que les facteurs du produit à rendre maximum aient une somme constante, a été indiquée par M. Grillet (*Nouvelles Annales*).

Digitized by Google

APPLICATIONS DU THÉORÈME III.

194. *Triangle isocèle maximum inscrit dans un cercle.*

Soient r le rayon du cercle, $2x$ la base du triangle et y la hauteur. La surface xy du triangle sera maximum dans les mêmes circonstances que son carré x^2y^2; d'ailleurs, la demi-base étant moyenne proportionnelle entre la hauteur et l'excès du diamètre sur cette hauteur, on a

$$x^2 = y(2r - y),$$

et, par suite,

$$x^2y^2 = (2r - y)y^3.$$

La somme $(2r - y) + y$ étant constante, il résulte du théorème III que l'expression qui précède est maximum pour

$$\frac{2r - y}{1} = \frac{y}{3}, \quad y = \frac{3}{2}r, \quad 2x = r\sqrt{3}.$$

Le triangle est alors équilatéral.

195. *Maximum de la surface latérale du cône inscrit dans une sphère.*

En désignant par r le rayon de la sphère, par y la hauteur du cône et par x le rayon de la base, on a à rendre maximum l'expression $\pi x\sqrt{x^2 + y^2}$, les variables x et y étant encore liées par la relation

$$x^2 = (2r - y)y.$$

Cette expression est maximum en même temps que son carré

$$\pi^2 x^2(x^2 + y^2) = 2\pi^2 r(2r - y)y^2,$$

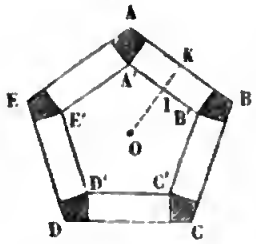
or le produit $(2r - y)y^2$ acquiert, en vertu du théorème III, sa plus grande valeur pour

$$\frac{2r - y}{1} = \frac{y}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{4}{3}r.$$

196. *Dans une feuille de carton* ABCDE *ayant la forme d'un polygone régulier, on inscrit un second polygone régulier* A′ B′ C′ D′ E′ *semblable au premier et semblablement placé; des*

sommets A′, B′, C′, D′, E′ *on mène des perpendiculaires sur les côtés du premier polygone, et on supprime les petits quadrilatères qui sont ombrés dans la figure ci-jointe. Déterminer l'apothème du nouveau polygone par la condition que la boîte qui aurait pour fond ce polygone, et pour faces latérales les rectangles restants, ait un volume maximum.*

Fig. 19.



En désignant par x l'apothème OI et par y la hauteur IK de la boîte, on voit aisément que $x+y$ est constant, et que le volume est proportionnel à x^2y; ce volume sera donc le plus grand possible, lorsqu'on aura

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1} \quad \text{ou} \quad x=\frac{2}{3}\,\text{OK} \quad \text{et} \quad y=\frac{1}{3}\,\text{OK}.$$

EXERCICES.

I. Appliquer la méthode générale des maximums aux problèmes suivants :

1°. Maximum de la surface totale du cylindre inscrit dans une sphère.

2°. Par les deux extrémités d'une droite AB, on mène deux droites BU, AV parallèles et de sens contraire; mener par un point fixe C pris sur AV une transversale CXY telle, que la somme des triangles XBY, XAC soit un minimum.

3°. Trouver sur la ligne des centres de deux sphères un point tel, que la somme des zones vues de ce point soit maximum.

4°. Étant donnés un point et une droite, aller du point à la droite par un chemin tel, que le temps employé à le parcourir avec une vitesse V diminué du temps employé à parcourir sa projection avec une vitesse $V' > V$ soit minimum. Déduire de là la solution du problème de la réfraction : Deux points A et B étant situés dans deux milieux différents que sépare la droite xy, et v, v' désignant les vitesses de la lumière dans les deux milieux, trouver

le chemin AXB que doit suivre une molécule lumineuse pour aller de A en B dans un temps minimum.

II. Applications des théorèmes I, II et III (**183** à **186**).

1°. Maximum de l'aire d'un triangle de périmètre donné.

2°. Maximum de la surface latérale du cylindre inscrit dans un cône droit; y et h étant les hauteurs, et x et r les rayons, on est conduit à rendre maximum l'expression xy, sachant que $\frac{x}{r}+\frac{y}{h}=1$; on remplace xy par $\frac{x}{r}\cdot\frac{y}{h}$ et l'on applique le théorème I.

3°. Maximum du volume du cylindre inscrit dans un cône droit. En conservant les notations précédentes, on a toujours $\frac{x}{r}+\frac{y}{h}=1$, et l'on applique le théorème III après avoir substitué $\left(\frac{x}{r}\right)^2\cdot\frac{y}{h}$ à la quantité x^2y qu'il faut rendre maximum.

4°. Maximum du volume du cylindre droit dont la surface est constante; y et x étant la hauteur et le rayon, il faut rendre maximum x^2y sachant que $xy+x^2$ est constant; on substitue à x^2y son carré $(xy)^2.x^2$ et on applique le théorème III.

5°. Rectangle maximum inscrit dans un cercle; x et y étant les deux dimensions, on est conduit à chercher le maximum de xy ou de x^2y^2, x^2+y^2 étant constant.

6°. Volume maximum du cylindre inscrit dans une sphère; x étant le rayon et y la hauteur du cylindre, on est conduit à rendre maximum x^2y ou $(x^2)^2y^2$, x^2+y^2 étant constant.

7°. Maximum du volume du cône droit inscrit dans une sphère; x étant le rayon et y la hauteur du cône, il faut rendre maximum x^2y sachant que $x^2=y(2r-y)$: on transforme x^2y en $(2r-y)y^2$ et l'on applique le théorème III.

III. Étendre le théorème III au cas où les exposants $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ sont des nombres fractionnaires. Lorsque ces exposants sont négatifs, c'est un minimum qui a lieu.

Digitized by Google

IV. Pour $y - x = a$, $x^{\alpha} y^{-\beta}$ est maximum ou minimum suivant que α est plus petit ou plus grand que β, et l'on a $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$.

V. Minimum de $A x^m + \frac{B}{x^n}$.

VI. Minimum du volume du cône circonscrit à la sphère et dont la base repose sur un plan diamétral.

VII. Un cercle étant inscrit dans un angle droit, mener une tangente telle, que le triangle rectangle ainsi formé est une aire maximum ou minimum.

VIII. Trouver la position que doit avoir un carré donné, pour qu'en tournant autour d'un axe passant par un de ses sommets et situé dans son plan, il engendre un volume maximum.

IX. Le périmètre d'un triangle rectangle est constant. Déterminer les côtés de façon que la hauteur issue du sommet de l'angle droit soit maximum.

CHAPITRE XV.

PROGRESSIONS.

DÉFINITION DES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

197. Une *progression arithmétique* est une suite de termes tels, que chacun d'eux soit égal au précédent augmenté d'une quantité constante, qu'on nomme *raison*.

La progression est *croissante* ou *décroissante* suivant que la raison est positive ou négative; ainsi les nombres

$$-6,\ -1,\ 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\ 29,\ldots$$

forment une progression croissante dont la raison est 5, ou une progression décroissante dont la raison est -5, suivant qu'on la regarde de gauche à droite ou de droite à gauche.

VALEUR D'UN TERME DE RANG QUELCONQUE.

198. Théorème. — *Un terme de rang quelconque est égal au premier augmenté d'autant de fois la raison qu'il a de termes avant lui.*

En effet, si l'on désigne par a le premier terme et par r la raison, le second terme est $a+r$, le troisième $a+2r$, le quatrième $a+3r,\ldots$ et en général le $n^{\text{ième}}$, c'est-à-dire celui qui a $n-1$ termes avant lui est égal à $a+(n-1)r$.

On verrait de même que *chaque terme est égal au dernier moins autant de fois la raison qu'il y a de termes après lui.*

199. Corollaire I. — *Dans une progression arithmétique croissante les termes finissent par surpasser tout nombre donné* A.

Car on satisfait à l'inégalité

$$a+(n-1)r>A$$

ou à l'inégalité équivalente

$$n > 1 + \frac{A - a}{r},$$

en prenant pour n le nombre entier immédiatement supérieur à

$$1 + \frac{A - a}{r}.$$

200. Corollaire II. — *Dans toute progression arithmétique la somme de deux termes équidistants des extrêmes a et l est constante.*

En effet, le terme qui en a n avant lui est égal à $a + nr$, celui qui en a n après lui est égal à $l - nr$; cette somme est donc $a + l$.

SOMME DES TERMES.

201. Théorème. — *La somme des termes d'une progression arithmétique est égale à la moitié du produit de la somme des extrêmes par le nombre des termes.*

En écrivant au-dessous de la progression cette même progression renversée et ajoutant par colonnes verticales, on obtient autant de fois la somme des extrêmes qu'il y a de termes; on a donc

$$2S = n(a + l),$$

d'où

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2} n(a + l).$$

202. Si l'on remplace dans cette formule le $n^{ième}$ terme l par sa valeur

$$(2) \qquad l = a + (n - 1)r,$$

on trouve, pour nouvelle expression de la somme,

$$S = \frac{n}{2}(2a + \overline{n - 1}\, r).$$

203. La formule (1) appliquée successivement aux progressions arithmétiques que forment, d'une part les n premiers nombres de la suite naturelle, et d'autre part les n premiers nombres impairs,

donne

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$1+3+5+7+\ldots+(2\overline{n-1}+1)=n^2.$$

INSERTION DE MOYENS ARITHMÉTIQUES.

204. Insérer $p-1$ moyens entre deux nombres a et l, c'est former une progression arithmétique de $p+1$ termes dont a et l soient les extrêmes.

Le problème consiste à trouver la raison x de cette progression ; or l étant le $(p+1)^{ième}$ terme, on a

$$l=a+px,$$

d'où

$$x=\frac{l-a}{p}.$$

Donc *la raison de la progression formée par l'insertion de moyens entre deux nombres s'obtient en divisant la différence de ces nombres par le nombre des moyens plus un.*

Exemple. — On veut insérer 8 moyens entre 1 et 100 ; la raison sera

$$\frac{100-1}{9}=\frac{99}{9}=11,$$

et la nouvelle progression contiendra les nombres

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.

205. Théorème I. — *Une progression arithmétique de raison r étant donnée, si l'on insère un même nombre $p-1$ de moyens entre chaque terme et le suivant, on obtiendra une suite de progressions partielles dont l'ensemble formera une progression unique.*

D'abord toutes les progressions partielles auront même raison $\frac{r}{p}$, et comme le dernier terme de chacune d'elles est le premier de la suivante, elles formeront une seule et même progression.

206. Théorème II. — *Pour insérer $pp'-1$ moyens entre deux nombres donnés a et l, on peut : soit insérer d'abord $p-1$ moyens entre ces nombres et insérer ensuite $p'-1$ moyens entre chaque*

terme de la progression obtenue et le suivant; soit insérer d'abord $p'-1$ moyens entre a et l, et insérer ensuite $p-1$ moyens entre les divers termes de la progression ainsi obtenue.

En effet, la raison de la progression qu'on obtient en insérant $pp'-1$ moyens a pour expression

$$\frac{l-a}{pp'},$$

qu'on peut écrire des deux manières suivantes :

$$\frac{\left(\frac{l-a}{p}\right)}{p'}, \quad \frac{\left(\frac{l-a}{p'}\right)}{p}.$$

Or on trouve évidemment la première en insérant d'abord $p-1$ moyens entre a et l, et puis $p'-1$ moyens entre les divers termes de la progression obtenue. On trouve, au contraire, la seconde en insérant d'abord $p'-1$ moyens entre les nombres a et l, et puis $p-1$ moyens entre chaque terme de la progression obtenue et le suivant.

Le théorème est général, et pour insérer $pp'p''\ldots-1$ moyens entre deux nombres, on peut insérer d'abord $p-1$ moyens entre ces nombres, puis $p'-1$ moyens entre les termes de la progression obtenue, puis $p''-1$ entre chaque terme de la nouvelle progression et le suivant, etc.

DÉFINITION DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

207. Une *progression géométrique* est une suite de nombres tels, que chacun d'eux soit égal au précédent multiplié par une quantité constante qu'on nomme *raison*.

La progression est croissante ou décroissante suivant que la raison est plus grande ou plus petite que l'unité. Ainsi les nombres

$$4, \quad 12, \quad 36, \quad 108, \quad 324, \quad 972, \ldots$$

forment une progression croissante dont la raison est 3, ou une progression décroissante dont la raison est $\frac{1}{3}$, suivant qu'on les regarde de gauche à droite ou de droite à gauche.

VALEUR D'UN TERME DE RANG QUELCONQUE.

208. Théorème. — *Un terme quelconque est égal au premier multiplié par une puissance de la raison ayant pour exposant le nombre des termes qui précèdent.*

Car, si l'on désigne le premier terme par a, et la raison par q, le second terme est aq, le troisième aq^2, le quatrième $aq^3, \ldots$, et en général le $n^{ième}$, c'est-à-dire celui qui a $n-1$ termes avant lui, est aq^{n-1}.

209. Corollaire. — *Dans une progression géométrique croissante, les termes finissent par surpasser tout nombre donné.*

En effet, soient k, l, m trois termes consécutifs quelconques, on a

$$l = kq, \quad m = lq, \quad m - l = (l - k)q,$$

et, par suite, puisque q est plus grand que 1,

$$m - l > l - k.$$

L'excès d'un terme sur le précédent va donc en croissant; or nous avons vu qu'il suffisait que cet excès fût constant pour que les termes finissent par dépasser toute limite.

Il suit de là que *dans une progression géométrique décroissante les termes peuvent devenir moindres que toute grandeur donnée;* car, si la progression

$$a, \quad aq, \quad aq^2, \ldots, aq^n, \quad aq^{n+1}, \ldots,$$

est décroissante, la progression

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a}\frac{1}{q}, \quad \frac{1}{a}\frac{1}{q^2}, \ldots, \quad \frac{1}{a}\frac{1}{q^n}, \quad \frac{1}{a}\frac{1}{q^{n+1}}, \ldots,$$

est croissante; les termes

$$\frac{1}{a}\frac{1}{q^n}, \quad \frac{1}{a}\frac{1}{q^{n+1}}, \ldots$$

peuvent donc devenir aussi grands qu'on veut, et, par suite, les dénominateurs

$$aq^n, \quad aq^{n+1}, \ldots$$

tendent vers zéro.

En particulier, *les puissances entières et positives d'un nombre plus grand que* 1 *croissent au delà de toute limite, et les puissances entières et positives d'un nombre inférieur à* 1 *tendent vers zéro.*

SOMME DES TERMES.

210. Soit S la somme

$$S = a + b + c + \ldots + k + l$$

des termes d'une progression géométrique de raison q; en multipliant par q, et observant que le produit de chaque terme par la raison est égal au terme suivant, on a

$$Sq = b + c + \ldots + k + l + lq,$$

et, par soustraction,

$$Sq - S = lq - a,$$

d'où

$$(1) \qquad S = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

211. Si l'on remplace dans cette formule le $n^{ième}$ terme l par sa valeur

$$(2) \qquad l = aq^{n-1},$$

on trouve

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

On obtient directement cette seconde expression, en écrivant la progression sous la forme

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}),$$

et remarquant que la parenthèse est le quotient de $q^n - 1$ par $q - 1$.

CAS D'UNE PROGRESSION INDÉFINIMENT DÉCROISSANTE.

212. La formule (1) peut encore s'écrire

$$S = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{lq}{1 - q}.$$

Si q est moindre que 1, c'est-à-dire si la progression est décroissante, et si de plus le nombre des termes croît indéfiniment, la fraction $\frac{a}{1-q}$ conserve une valeur fixe, tandis que la partie $l\frac{1}{1-q}$ tend vers zéro à cause du facteur l qui décroît de plus en plus (**209**); la somme S a donc pour limite

$$\frac{a}{1-q}.$$

Application. — Toute fraction décimale périodique

$$0,2727\,27\,27\ldots$$

est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini,

$$\frac{27}{100},\quad \frac{27}{100}\frac{1}{100},\quad \frac{27}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^2,\quad \frac{27}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^3,\ldots.$$

En calculant sa valeur par la formule $S=\frac{a}{1-q}$, on trouve

$$0,27\,27\,27\ldots=\frac{\frac{27}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{27}{99}.$$

INSERTION DE MOYENS GÉOMÉTRIQUES.

213. Insérer $p-1$ moyens géométriques entre deux nombres a et l, c'est former une progression géométrique de $p+1$ termes dont a et l sont les extrêmes. En désignant par x la raison inconnue de cette progression dont l est le $(p+1)^{ième}$ terme, on a

$$l=ax^p,\quad \text{d'où}\quad x=\sqrt[p]{\frac{l}{a}}=\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La raison est donc égale à une racine du quotient des nombres donnés dont l'indice est le nombre des moyens à insérer plus un.

214. Théorème I. — *Une progression géométrique de raison q étant donnée, si l'on insère un même nombre $p-1$ de moyens*

entre chaque terme et le suivant, on obtiendra une suite de progressions partielles dont l'ensemble formera une progression unique.

D'abord toutes les progressions partielles auront même raison $\sqrt[p]{q}$, et comme le dernier terme de chacune d'elles est le premier de la suivante, elles formeront une seule et même progression.

215. Théorème II. — *Pour insérer $pp'-1$ moyens entre deux nombres donnés a et l, on peut, soit insérer d'abord $p-1$ moyens entre ces nombres et insérer ensuite $p'-1$ moyens entre chaque terme de la progression obtenue et le suivant; soit insérer d'abord $p'-1$ moyens entre a et l, et insérer ensuite $p-1$ moyens entre les derniers termes de la progression obtenue.*

En effet, la raison de la progression qu'on obtient en insérant $pp'-1$ moyens a pour expression

$$\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{pp'}},$$

qu'on peut écrire des deux façons suivantes :

$$\left[\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{p'}}, \qquad \left[\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{1}{p}};$$

Or on trouve l'une ou l'autre suivant qu'on opère conformément au premier ou au second mode énoncé. Ce théorème peut d'ailleurs être généralisé comme celui du n° **206**.

SOMME DES CARRÉS ET DES CUBES DES NOMBRES DE LA SUITE NATURELLE.

216. La formule qui donne la somme des carrés des n premiers nombres est souvent utile. Pour la trouver, il suffit d'ajouter par colonnes verticales les identités suivantes :

$$1^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1,$$
$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1,$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1,$$
$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1,$$
$$5^3 = (4+1)^3 = 4^3 + 3.4^2 + 3.4 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$n^3 = (\overline{n-1}+1)^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^3 = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n + 1.$$

On obtient ainsi la relation

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$
$$+ 3(1 + 2 + 3 + \ldots n) + n + 1,$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3\frac{n(n+1)}{2} + n + 1;$$

d'où l'on déduit

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

217. En formant de la même manière les quatrièmes puissances des nombres 1, 2, 3,..., $(n+1)$, on trouverait, pour la somme des cubes,

$$(1) \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Au lieu d'entrer dans les détails de cette opération, qui ne présente d'ailleurs rien de difficile, nous indiquerons un mode de raisonnement très-fréquemment employé en algèbre pour reconnaître l'exactitude d'une formule telle que (1), et que l'on donne sans démonstration.

On substitue d'abord à n les nombres les plus simples 1, 2, 3. On trouve ainsi

pour $n = 1$, $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left(\frac{1.2}{2}\right)^2 = 1^3$,

pour $n = 2$, $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left(\frac{2.3}{2}\right)^2 = 9 = 1^3 + 2^3$,

pour $n = 3$, $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left(\frac{3.4}{2}\right)^2 = 36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$.

La formule est donc vraie pour $n = 1, 2, 3$. On aura dès lors prouvé qu'elle est générale, si l'on fait voir qu'en la supposant exacte pour une valeur quelconque de n, elle subsiste pour la valeur immédiatement supérieure : car de ce qu'elle est vraie pour $n = 3$, on conclura qu'elle subsiste pour $n = 4$, puis pour $n = 5$..., et ainsi de suite, jusqu'à telle valeur de n qu'on voudra.

Il s'agit donc de montrer que la relation (1) entraîne

$$(2)\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2,$$

ou encore, retranchant (1) de (2), que l'on a

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Or le second membre peut s'écrire

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 [(n+2)^2 - n^2] = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 (4n+4) = (n+1)^3;$$

en sorte que la formule est vérifiée.

PILES DE BOULETS.

218. Dans les arsenaux on range les boulets par piles; ces piles sont de trois sortes :

La *pile triangulaire* a la forme d'une pyramide triangulaire dont le sommet est occupé par un boulet placé sur $(1+2)$ autres, lesquels reposent sur $(1+2+3)$ boulets, ...; en sorte que la tranche horizontale de rang k, à partir du sommet,

contient un nombre de boulets égal à

$$(1+2+3+\ldots+k) = \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k^2.$$

La somme des boulets d'une pile de n tranches est donc

$$T = \frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2),$$

ou

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}\right] = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Pile quadrangulaire. — Chaque tranche est un carré dont le côté contient autant de boulets qu'il y a d'unités dans le rang de la tranche compté à partir du sommet

La somme des boulets d'une pile de n tranches est donc

$$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pile rectangulaire. — Le sommet est une file de $p + 1$ boulets, placée sur deux files de $p + 2$ boulets, lesquelles reposent sur trois files de $p + 3$ boulets,..., conformément aux figures suivantes :

La somme des boulets d'une pile de n tranches est donc

$$\begin{aligned} R &= p + 1 + 2(p+2) + 3(p+3) + \ldots + n(p+n) \\ &= p(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 \\ &= p\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

219. En mettant les trois formules précédentes sous la forme

$$T = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{3}(n+1+1),$$

$$Q = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{3}(n+n+1),$$

$$R = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{3}(\overline{p+1} + \overline{p+n} + \overline{p+n}),$$

on voit que, *dans une pile quelconque, le nombre des boulets est égal au nombre de boulets d'une face triangulaire multiplié par le tiers de la somme des trois arêtes parallèles, qui sont en dehors de cette face.*

On calcule une pile tronquée en la regardant comme la différence de la pile complète et de la partie qui manque.

EXERCICES.

I. Trouver une progression géométrique connaissant la somme de ses termes, la somme de leurs carrés et la somme de leurs cubes.

II. Faire la somme des produits deux à deux des m premiers termes d'une progression géométrique de raison q.

III. Trouver l'époque de la rencontre de deux courriers qui, séparés d'abord par un intervalle d, vont l'un vers l'autre en parcourant respectivement

$$a, \quad a+h, \quad a+2h, \ldots,$$
$$b, \quad b+k, \quad b+2k, \ldots,$$

dans la première, la deuxième, la troisième,..., minute. — Discussion.

IV. En joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère, on obtient un parallélogramme; on opère de même sur ce parallélogramme, puis sur le suivant, etc.,... Prouver que la somme des aires de tous ces parallélogrammes a pour limite le double de l'aire du quadrilatère primitif.

V. Sommer la suite

$$\frac{a}{b}+\frac{a+r}{bq}+\frac{a+2r}{bq^2}+\ldots+\frac{a+nr}{bq^n}.$$

VI. De deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique, ayant mêmes termes extrêmes et même nombre de termes, quelle est celle dont les termes ont la plus grande somme?

VII. On écrit la suite naturelle des nombres sans séparer les différents chiffres; chercher le 859526e chiffre de cette série.

VIII. Trouver la relation qui lie trois termes de rangs m, n, p dans une progression arithmétique ou géométrique. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ peuvent-ils faire partie d'une telle progression?

IX. Les deux premiers termes d'une progression géométrique a, aq, aq^2, ..., étant positifs et égaux aux deux premiers termes de la progression arithmétique a, $a+d$, $a+2d$, ..., chaque terme de cette dernière progression est moindre que le terme correspondant de la première.

X. $\sqrt[m+n+p]{abc}$ est une moyenne entre $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$.

XI. Trouver une progression géométrique de quatre termes d'après les données suivantes :

1°. On connaît la somme de quatre termes et la somme de leurs carrés;

2°. On connaît l'excès de la somme des extrêmes sur celle des moyens et l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur la somme des carrés des moyens;

3°. La somme des quatre termes et la différence entre la somme des carrés des extrêmes et la somme des carrés des moyens.

CHAPITRE XVI.

THÉORIE DES LOGARITHMES.

DÉFINITIONS.

220. Soient deux progressions croissantes et indéfinies

$$(1) \qquad 0, \quad r, \quad 2r, \quad 3r, \quad 4r, \ldots,$$

$$(2) \qquad 1, \quad q, \quad q^2, \quad q^3, \quad q^4, \ldots,$$

l'une arithmétique, commençant par zéro, l'autre géométrique, commençant par 1.

Insérons $p-1$ moyens arithmétiques entre chaque terme de la progression (1) et le suivant; insérons de même $p-1$ moyens géométriques entre les divers termes de la progression (2); nous obtiendrons deux nouvelles progressions dans lesquelles les termes des progressions primitives se correspondront. Il est facile de démontrer qu'on peut toujours prendre p assez grand pour que les termes des progressions nouvelles croissent par degrés insensibles.

En effet :

1°. La différence entre deux termes consécutifs quelconques de la nouvelle progression arithmétique est égale à la nouvelle raison $\frac{r}{p}$, et pour que $\frac{r}{p}$ soit moindre qu'un nombre donné ε, il suffit que p soit plus grand que $\frac{r}{\varepsilon}$.

2°. Soient M un terme quelconque de la nouvelle progression géométrique dont la raison est $\sqrt[p]{q}$, et C un nombre fini supérieur à M, la différence de deux termes consécutifs

$$M\sqrt[p]{q} - M = M(\sqrt[p]{q} - 1)$$

est moindre que

$$C(\sqrt[p]{q} - 1);$$

il suffit donc de prouver que l'on peut toujours satisfaire à l'inégalité

$$C(\sqrt[q]{p} - 1) < \varepsilon \quad \text{ou} \quad q < \left(1 + \frac{\varepsilon}{C}\right)^p.$$

Or il résulte du théorème **209**, que l'on peut toujours prendre p assez grand pour que $\left(1 + \frac{\varepsilon}{C}\right)^p$ surpasse tout nombre donné q.

221. En désignant par λ et $1 + \alpha$ les raisons des deux nouvelles progressions, on peut écrire

$$\begin{array}{lllllll} (1') & 0, & \lambda, & 2\lambda, & 3\lambda, \ldots, & n\lambda, \ldots, \\ (2') & 1, & 1+\alpha, & (1+\alpha)^2, & (1+\alpha)^3, \ldots, & (1+\alpha)^n, \ldots, \end{array}$$

λ et α étant des nombres aussi petits que l'on voudra.

Actuellement nous allons définir le *logarithme* de tout nombre N positif et plus grand que 1.

Si le nombre N fait partie de la progression (2'), c'est-à-dire peut être introduit dans la progression (2) par l'insertion de moyens, son logarithme est le terme qui occupe le même rang dans la progression (1'). Aussi $n\lambda$ est le logarithme de $(1 + \alpha)^n$.

Si le nombre N ne peut pas être introduit dans la progression géométrique (2), il ne fera pas partie de la progression (2'), mais il sera compris entre deux termes consécutifs, tels que $(1 + \alpha)^n$, $(1 + \alpha)^{n+1}$; car la raison $1 + \alpha$ étant supérieure à 1, les termes de la suite (2') croissent au delà de toute limite (**209**). En substituant à N l'un quelconque des deux termes qui le comprennent, on commettra une erreur moindre que la différence de ces termes, c'est-à-dire aussi petite qu'on voudra.

Le nombre N étant la limite commune des termes $(1 + \alpha)^n$, $(1 + \alpha)^{n+1}$, son logarithme est, *par définition*, la limite commune des logarithmes $n\lambda$, $(n + 1)\lambda$ de ces deux termes; et, en prenant soit $n\lambda$, soit $(n + 1)\lambda$ pour le logarithme de N, on aura de ce logarithme une valeur aussi approchée qu'on voudra, puisque l'erreur commise sera moindre que la raison λ, qui peut être diminuée à volonté.

Digitized by Google

222. Les mêmes raisonnements s'appliquent au cas où le nombre positif N est moindre que 1; il suffit de concevoir les deux progressions (1′) et (2′) continuées de droite à gauche de manière à avoir le système complet

$$(1'')\ldots,\quad 3\lambda,\quad -2\lambda,\quad -\lambda,\quad 0,\quad \lambda,\quad 2\lambda,\quad 3\lambda,\ldots,$$
$$(2'')\ldots,\quad (1+\alpha)^{-3},\ (1+\alpha)^{-2},\ (1+\alpha)^{-1},\ 1,\ (1+\alpha)^{1},\ (1+\alpha)^{2},\ (1+\alpha)^{3},\ldots.$$

Le logarithme du nombre N positif et inférieur à 1 sera, par définition, la limite commune des termes $-n\lambda$, $-(n+1)\lambda$, qui correspondent aux termes $(1+\alpha)^{-n}$, $(1+\alpha)^{-(n+1)}$, dont N est la limite commune.

Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.

223. Les progressions (1) et (2) qui nous ont servi de point de départ sont assujetties à la seule condition d'avoir 0 et 1 pour termes correspondants. Comme on peut se procurer une infinité de systèmes de deux progressions jouissant de cette propriété, il existe une infinité de systèmes de logarithmes. Le logarithme d'un nombre isolé reste donc arbitraire tant qu'on n'a pas indiqué les progressions qui déterminent le système particulier de logarithmes qu'on a en vue.

Enfin, pour légitimer la définition des logarithmes et montrer qu'elle n'est pas contradictoire, il reste à établir que, *si l'on peut introduire un même nombre* N *dans la progression* (1) *en insérant deux nombres différents* $p-1$, $p'-1$ *de moyens, on trouve dans les deux cas le même logarithme pour ce nombre.* Or il résulte des n^{os} **206** et **215** que les valeurs obtenues dans les deux cas pour le logarithme de N ne diffèrent pas l'une et l'autre de celle que fournirait l'insertion directe de $pp'-1$ moyens entre les divers termes des deux progressions.

PROPRIÉTÉS DES LOGARITHMES

224. *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.*

Considérons d'abord un produit de deux facteurs. Le théorème est évident, si les deux facteurs font partie de la progression géo-

métrique ($2''$). Soient, en effet,

$$(1+\alpha)^p, \qquad (1+\alpha)^q$$

les deux facteurs : le logarithme du produit $(1+\alpha)^{p+q}$ est

$$(p+q)\lambda,$$

c'est-à-dire la somme

$$p\lambda + q\lambda$$

des logarithmes des deux facteurs. Dans le cas où les deux nombres P et Q ne peuvent être introduits dans la progression géométrique, on pourra toujours, en insérant un nombre suffisant de moyens, trouver deux termes $(1+\alpha)^p$, $(1+\alpha)^q$, qui différeront aussi peu qu'on voudra de P et de Q; et si l'on étend aux limites l'égalité

$$\log[(1+\alpha)^p\ (1+\alpha)^q] = \log(1+\alpha)^p + \log(1+\alpha)^q,$$

on obtiendra

$$\log PQ = \log P + \log Q.$$

Considérons maintenant un nombre quelconque de facteurs; on a successivement

$$\begin{aligned}\log(PQRS) &= \log(PQR) + \log S\\ &= \log(PQ) + \log R + \log S\\ &= \log P + \log Q + \log R + \log S.\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

225. *Le logarithme d'un quotient est égal à l'excès du logarithme du dividende sur le logarithme du diviseur.*

En effet, en représentant par q la valeur du quotient $\frac{a}{b}$, on a

$$a = bq, \qquad \log a = \log b + \log q,$$

et, par suite,

$$\log a - \log b = \log q.$$

226. *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

Soit a^m la puissance; il y a trois cas à distinguer, suivant que l'indice est entier, fractionnaire ou négatif.

1°. Si m est entier, on a

$$a^m = a.a.a.a\ldots (m \text{ fois}),$$
$$\log a^m = \log a + \log a + \ldots (m \text{ fois}) = m \log a.$$

2°. Si m est fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$, en désignant par α la valeur de a^m, on a

$$a^p = \alpha^q, \qquad p \log a = q \log \alpha, \qquad \log \alpha = \frac{p}{q} \log a,$$

ou

$$\log a^m = m \log a.$$

3°. Enfin, si m est négatif et égal à $-n$, on a

$$\log a^m = \log \frac{1}{a^n} = \log 1 - \log a^n = -n \log a = m \log a.$$

227. On voit, d'après cela, qu'une Table de logarithmes permettrait de simplifier beaucoup les calculs; les multiplications, divisions, formations de puissances, extractions de racines seraient remplacées respectivement par des additions, soustractions, multiplications et divisions.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE LOGARITHMES.

228. Il résulte de la définition des logarithmes que, *dans tous les systèmes, le logarithme de* 1 *est* 0. On appelle *base* d'un système le nombre qui, dans ce système, a pour logarithme l'unité. Ce nombre a une fois choisi, on connaît deux termes 1 et a de la progression géométrique et leurs correspondants 0 et 1 de la progression arithmétique : les deux progressions fondamentales sont donc déterminées, et, par suite, le système particulier de logarithmes qu'on a en vue.

Le rapport des logarithmes de deux nombres est le même dans tous les systèmes.

La proposition est évidente lorsque les deux nombres font partie de la progression géométrique

$$\ldots (1+\alpha)^{-2}, \qquad (1+\alpha)^{-1}, \qquad 1, \qquad (1+\alpha)^1, \qquad (1+\alpha)^2 \ldots;$$

car soient

$$(1+\alpha)^p \quad \text{et} \quad (1+\alpha)^q$$

ces deux nombres. Les progressions arithmétiques

$$\begin{array}{llllll} \ldots, & -2\lambda, & -\lambda, & 0, & \lambda, & 2\lambda, \ldots, \\ \ldots, & -2\mu, & -\mu, & 0, & \mu, & 2\mu, \ldots \end{array}$$

montrent que le rapport des logarithmes est $\frac{p\lambda}{q\lambda}$ ou $\frac{p}{q}$ dans le premier système, et $\frac{p\mu}{q\mu}$ ou $\frac{p}{q}$ dans le second.

En raisonnant comme au n° **224**, on étend le théorème au cas où les deux nombres ne sont pas contenus dans la progression géométrique.

On conclut de là que, *pour passer d'un logarithme* $\log N$ *pris dans la base b au logarithme* $\log N$ *du même nombre pris dans la base a, il faut diviser l'ancien logarithme par le logarithme de la nouvelle base pris dans l'ancien système.* On a, en effet,

$$\frac{\log_a N}{\log_a a} = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad \text{ou} \quad \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

229. Considérons les deux progressions

$$\begin{array}{llllll} \ldots, & (1+\alpha)^{-2}, & (1+\alpha)^{-1}, & 1, & (1+\alpha)^{1}, & (1+\alpha)^{2}, \ldots, \\ \ldots, & -2\lambda, & -\lambda, & 0, & \lambda, & 2\lambda, \ldots, \end{array}$$

qui définissent un système quelconque de logarithmes, et posons

$$\lambda = \mu\alpha.$$

Si $(1+\alpha)^p$ est la base a du système considéré, on a

$$p\lambda = p\mu\alpha = 1,$$

et cette base a pour expression

$$a = (1+\alpha)^{\frac{1}{\mu\alpha}}.$$

L'Écossais Néper, l'illustre inventeur des logarithmes, choisit le système particulier pour lequel le nombre μ, qu'il appelait *module*, est le plus simple, c'est-à-dire est égal à 1. La base de ce système est donc la limite de $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, lorsque α tend vers zéro. On démontre, en algèbre supérieure, que ce nombre, qu'on appelle e, est incommensurable et égal à 2,7182818. .. On désigne

les logarithmes népériens par le signe l. Pour passer de ce système à un système quelconque de base a, il faut multiplier par le module $\frac{1}{l.a}$.

230. On vient de voir que, dans un système quelconque de base $a = (1+\alpha)^{\frac{1}{\mu\alpha}}$, le logarithme de $(1+\alpha)^n$ est $n\mu\alpha$. Or on a identiquement

$$(1+\alpha)^n = \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\mu\alpha}}\right]^{n\mu\alpha} = a^{n\mu\alpha}.$$

Le logarithme d'un nombre est donc l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base du système pour retrouver ce nombre. C'est ainsi qu'on définit les logarithmes dans l'algèbre supérieure.

LOGARITHMES VULGAIRES.

231. Dans les calculs numériques, on emploie exclusivement le système de logarithmes qui a pour base 10, et qui résulte du choix des deux progressions

1,	10,	100,	1000,	10000,...,
0,	1,	2,	3,	4,....

C'est Brigg's qui calcula le premier (1624), sur les instances de Néper, les logarithmes vulgaires des nombres compris entre 1 et 20000, et entre 90000 et 1000000. La lacune fut comblée plus tard (1628) par Adrien Vlacq.

CARACTÉRISTIQUE.

232. *Le logarithme d'une puissance quelconque de* 10 *est égal à l'exposant de cette puissance.* Car

$$\log 10^n = n \log 10 = 1.$$

233. *Les logarithmes de tous les nombres autres que les puissances de* 10 *sont incommensurables.*

En effet, soit N un nombre dont on suppose le logarithme com-

mensurable, et représenté par la fraction à termes entiers $\frac{m}{n}$; on a

$$\log N = \frac{m}{n}, \qquad n \log N = m, \qquad \log N^n = m = \log 10^m,$$

et enfin,

$$N^n = 10^m.$$

Le second membre étant entier, le premier doit l'être, et par suite N. De plus, N ne doit contenir que les facteurs premiers 2 et 5, puisque tout facteur premier de N divise N^n ou son égal 10^m, et par suite 10.

Soit donc

$$N = 2^p 5^q,$$

on a

$$2^{pn} 5^{qn} = 10^m = 2^m . 5^m;$$

ce qui entraîne

$$pn = m, \qquad qn = m \qquad \text{ou} \qquad p = q.$$

En d'autres termes, N est une puissance de 10. Donc les puissances de 10 sont les seuls nombres qui aient des logarithmes commensurables. Les logarithmes des autres nombres ne peuvent être obtenus qu'avec approximation; on les évalue à moins d'une unité décimale du septième ordre par excès ou par défaut, et l'on donne le nom de *caractéristique* à leur partie entière.

234 *La caractéristique du logarithme d'un nombre plus grand que* 1 *contient autant d'unités moins une qu'il y a de chiffres dans la partie entière de ce nombre.*

Car tout nombre dont la partie entière a n chiffres est compris entre 10^{n-1} et 10^n. Son logarithme est donc compris entre $n - 1$ et n, et il a $n - 1$ chiffres à sa partie entière.

235. *Connaissant le logarithme d'un nombre, on trouvera celui d'un nombre* 10^n *fois plus grand ou plus petit en augmentant ou diminuant sa caractéristique de n unités.*

En effet, on a

$$\log(A . 10^n) = \log A + \log 10^n = \log A + n,$$
$$\log(A : 10^n) = \log A - \log 10^n = \log A - n.$$

Il résulte de là que, *si deux nombres ne diffèrent que par la place de la virgule, leurs logarithmes ne diffèrent que par la caractéristique.*

CARACTÉRISTIQUE NÉGATIVE.

236. On a vu que les logarithmes des nombres moindres que l'unité sont négatifs. Le théorème précédent permet d'exclure du calcul ces logarithmes entièrement négatifs, et de les remplacer avantageusement par des logarithmes dont la caractéristique seule est négative.

Soit, en effet, un nombre quelconque moindre que 1, évalué en décimales,

$$0,00458.$$

En multipliant par 10^3, on obtient le nombre 4,58, qui a pour logarithme

$$0,66086548:$$

le logarithme de 0,00458 est donc

$$0,66086548 - 3,$$

qu'on écrit

$$\overline{3},66086548,$$

en plaçant le signe — au-dessus de la caractéristique pour indiquer que ce signe ne porte que sur elle.

En général, soient N un nombre inférieur à 1, et k le rang de son premier chiffre significatif compté à partir de la virgule. En avançant la virgule de k rangs vers la droite, c'est-à-dire en multipliant par 10^k, on obtient un nombre $N \times 10^k$ compris entre 0 et 10, et dont le logarithme a, par suite, une caractéristique égale à zéro et une partie décimale positive. Pour revenir au nombre N, il faut (235) conserver la même partie décimale et retrancher k unités de la caractéristique; le logarithme de N aura donc une caractéristique négative égale à $\overline{k}$ et une partie décimale positive.

Donc *le logarithme d'une fraction décimale est un nombre formé : 1° d'une caractéristique négative égale en valeur absolue au rang du premier chiffre significatif compté à partir de la virgule; 2° d'une partie décimale égale à celle du logarithme du nombre entier formé par l'ensemble des chiffres significatifs.*

237. Par conséquent, *pour trouver le nombre correspondant à un logarithme dont la caractéristique est négative, on cherche le nombre comme si la caractéristique était zéro, et l'on recule vers la gauche la virgule d'autant de rangs qu'il y a d'unités dans la valeur absolue de la caractéristique négative.*

Ainsi, soit proposé de trouver le nombre x correspondant au logarithme

$$\bar{3},66086548,$$

on a

$$\log x = 0,66086548 - 3 = 0,66086548 - \log 10^3,$$

$$\log x = \log 4,58 - \log 10^3 = \log \frac{4,58}{10^3},$$

$$\log x = \log 0,00458,$$

$$x = 0,00458.$$

COMPLÉMENTS ARITHMÉTIQUES.

238. On appelle *complément arithmétique* d'un nombre l'excès sur ce nombre de la puissance de 10 immédiatement supérieure. Ainsi, le complément de 5834 est

$$10000 - 5834 = 4166.$$

On trouve évidemment *le complément arithmétique d'un nombre en retranchant, dans tel ordre qu'on veut, le premier chiffre à droite de* 10 *et chacun des autres de* 9.

Les logarithmes qui entrent ordinairement dans les calculs étant moindres que 10, on appelle complément d'un logarithme l'excès de 10 sur ce logarithme. Les compléments facilitent beaucoup les calculs par logarithmes. La relation

$$a - l = a + (10 - l) - 10$$

montre, en effet, *qu'au lieu de soustraire un logarithme, on peut ajouter son complément, puis retrancher* 10. *Si l'on a plusieurs logarithmes à soustraire, on ajoute les compléments et l'on retranche de la somme autant de dizaines qu'elle renferme de compléments*

DISPOSITION DES TABLES DE CALLET.

239. Les cinq premières pages contiennent, sous le titre de Chiliade I, les parties décimales des logarithmes des nombres entiers compris entre 1 et 1200; ces logarithmes sont évalués avec 8 décimales et placés en regard des nombres auxquels ils correspondent.

Les Tables suivantes s'étendent de 1020 à 108000; la colonne N renferme tous les nombres entiers depuis 1020 jusqu'à 10800; et la colonne suivante marquée 0 offre les logarithmes qui appartiennent à ces nombres; les nombres de trois chiffres isolés qu'on voit à la gauche de cette colonne sont censés écrits au-dessous d'eux-mêmes, de façon à remplir toutes les lignes.

Dans les colonnes intitulées 1, 2, 3, ..., 9, on trouve quatre chiffres vis-à-vis chaque nombre de la colonne N; ces chiffres, substitués à ceux qui leur correspondent horizontalement dans la colonne marquée 0, donnent le logarithme du nombre formé en écrivant à la droite du nombre correspondant de la colonne N, celui des chiffres 1, 2, 3, ..., 9, qui sert de titre à la colonne verticale considérée. Ainsi, en se reportant à la page 87 des Tables, on voit que le logarithme du nombre 5881 a pour partie décimale 769451, tandis que la partie décimale du logarithme de 58817 est 7695029.

La dernière colonne, intitulée *diff.*, contient de petits tableaux surmontés d'un nombre isolé; ces nombres isolés sont les différences des logarithmes des nombres entiers consécutifs, et les petits tableaux situés au-dessous contiennent d'une part les chiffres 1, 2, 3, ..., 9, et de l'autre les produits de la différence par 0,1, 0,2, 0,3, ..., 0,9.

L'inspection des Tables montre qu'une même différence tabulaire convient à un grand nombre de couples de logarithmes consécutifs; au degré d'approximation des Tables, cette différence reste souvent constante pendant plusieurs pages; il en résulte que *pour les nombres entiers compris dans ces pages l'accroissement des logarithmes est proportionnel à celui des nombres.*

RECHERCHE DU LOGARITHME D'UN NOMBRE DONNÉ.

240. La caractéristique est fournie par la règle du n° **234**; il ne reste donc à chercher que la partie décimale.

1er Cas. — *Le nombre n'a que cinq chiffres significatifs.*

On fait abstraction de la virgule, dont la position n'influe que sur la caractéristique, et l'on est ramené à opérer sur un nombre entier.

Soit donc alors 58856 le nombre donné; on cherche dans la colonne N le nombre 5885 formé par les quatre chiffres de gauche, et l'on obtient le logarithme cherché, en écrivant à la droite des trois chiffres isolés 769 de la colonne marquée 0, les quatre chiffres 7907 placés à l'intersection de la colonne verticale intitulée 6 et de la ligne horizontale qui part du nombre 5885; la partie décimale du logarithme cherché est finalement

$$7697907.$$

2e Cas. — *Le nombre proposé est quelconque.*

On place la virgule de façon à séparer cinq chiffres sur la gauche du nombre proposé qui devient ainsi un nombre décimal $n + d$, dont la partie entière n contient cinq chiffres. On cherche, comme nous venons de l'expliquer, la partie décimale l du logarithme de n; on prend ensuite la différence Δ entre les logarithmes de n et de $n + 1$, et l'on ajoute à l le nombre x déterminé par la proportion

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{d}{1},$$

d'où

$$x = d\Delta.$$

Seulement, au lieu d'effectuer le produit $d\Delta$, on ajoute successivement les produits de la différence tabulaire Δ par les différents chiffres de d en négligeant les chiffres de ces produits partiels qui n'influent pas sur la septième décimale; ces divers produits partiels se trouvent tout faits dans le petit tableau placé au-dessous de Δ.

Digitized by Google

Ainsi soit proposé le nombre

$$588,56732.$$

Le logarithme de ce nombre a une caractéristique égale à 2, et une partie décimale égale à celle du logarithme de

$$58856,732.$$

On trouve dans la Table

$$7697907$$

pour la partie décimale de log 58856 : la Table des différences la plus voisine est celle qui correspond à 74, et les produits de cette différence par 0,7, 0,3, 0,2, sont 52, 22, 15 unités du 7e ordre; on en conclut que

$$74 \times 0,7 = 52,$$
$$74 \times 0,03 = 2,2,$$
$$74 \times 0,002 = 0,15,$$

et l'on écrit

	log 58856	7697907
pour	0,7	52
pour	0,03	2,2
pour	0,002	0,15
	log 58856,732	7697961
	log 588,56732	2,7697961

RECHERCHE DU NOMBRE CORRESPONDANT A UN LOGARITHME DONNÉ.

241. On cherche d'abord les chiffres significatifs du nombre, sauf à placer plus tard la virgule d'après la caractéristique du logarithme donné.

A cet effet, on prend dans la Table la partie décimale qui approche le plus par défaut de la partie décimale du logarithme donné; soient δ la différence de ces parties décimales, n le nombre entier correspondant à la partie décimale prise dans la Table, et Δ

la différence tabulaire la plus voisine; on pose la proportion

$$\frac{x}{1} = \frac{\delta}{\Delta},$$

et l'on ajoute à n la valeur de x réduite en décimales. Le petit tableau placé au-dessous de Δ permet de trouver x sans diviser δ par Δ.

Soit, par exemple, proposé le logarithme

$$2,7697961.$$

On cherche parmi les chiffres isolés de la colonne marquée o le nombre de trois chiffres 769; puis on cherche les quatre chiffres suivants 7961 parmi les groupes de quatre chiffres destinés à compléter les logarithmes qui commencent par 769; celui de ces groupes qui approche le plus par défaut de 7961 est 7907; et la partie décimale 7697907 correspond au nombre 58856. On retranche 7907 de 7961, le reste est ici 54, et la différence la plus voisine est 74; au lieu de poser la proportion

$$\frac{x}{1} = \frac{54}{74},$$

on cherche dans le petit tableau placé au-dessous de 74 le nombre immédiatement inférieur à 54; c'est 52 qui répond à 0,7. La différence entre 54 et 52 est 2 qu'on multiplie par 10; le nombre qui approche le plus par défaut de 20 est 15 qui répond à 0,02, la différence entre 20 et 15 est 5 qu'on multiplie par 10; le nombre qui approche le plus par défaut de 50 est 44 qui répond à 0,006. Le nombre correspondant au logarithme cherché est donc

$$58856 + 0,7 + 0,02 + 0,006$$

ou

$$58856,726,$$

et en plaçant convenablement la virgule,

$$588,56726.$$

On dispose le calcul comme ci-dessous :

	log 2,7697961	
pour	7697907	58856
Reste.....	54	
pour	52	0,7
pour	15	0,02
pour	50	0,006
	log 2,7697961	588,56726

INTÉRÊTS COMPOSÉS.

242. L'intérêt est le bénéfice que fait sur son argent celui qui le prête ; il dépend de la somme prêtée ou *capital*, du temps pendant lequel on la prête, et du *denier* de l'intérêt, c'est-à-dire de l'intérêt de 1 franc par an.

L'intérêt est simple, quand il est retiré à la fin de chaque année, de façon que la somme prêtée reste constante ; il est *composé*, lorsqu'à la fin de chaque année il s'ajoute au capital pour porter intérêt pendant l'année suivante.

243. *Quelle est au bout de n années la valeur x d'un capital a placé à intérêts composés, au denier r.*

Au bout d'un an, la somme primitive a s'est accrue de son intérêt ar ; elle est devenue

$$a(1+r).$$

La somme $a(1+r)$ deviendra elle-même au bout d'un an

$$a(1+r)(1+r) \quad \text{ou} \quad a(1+r)^2.$$

En continuant ainsi, on voit que le capital acquiert les valeurs

$$a(1+r)^3, \quad a(1+r)^4, \ldots, \quad a(1+r)^n,$$

après 3, 4, ..., n années. On a donc

$$x = a(1+r)^n.$$

Cette formule renferme quatre quantités x, a, r, n ; on peut lui

donner les quatre formes suivantes :

$$\log x = \log a + n \log(1 + r), \qquad \log a = \log x - n \log(1 + r),$$

$$n = \frac{\log x - \log a}{\log(1 + r)}, \quad \log(1 + r) = \frac{\log x - \log a}{n},$$

chacune d'elles répond à un problème différent dont le lecteur trouvera lui-même l'énoncé. Par exemple, si l'on veut savoir dans combien d'années un capital devient k fois plus grand, il suffit de remplacer x par ka dans la troisième formule, qui devient

$$n = \frac{\log k}{\log(1 + r)};$$

on voit que ce temps est, comme de raison, indépendant de la valeur du capital ; il faut un peu plus de 14 ans pour qu'un capital placé à 5 pour 100 devienne double.

244. Lorsque la durée du placement n'est pas un nombre entier d'années et se compose, par exemple, de n années plus p jours, on obtient sa valeur x en ajoutant à l'expression précédente $a(1 + r)^n$ l'intérêt simple de cette dernière somme pendant les p jours ; on a ainsi

$$x = a(1 + r)^n \left(1 + \frac{p}{360} r\right).$$

La recherche du denier r est alors un problème difficile qu'on résout par approximations successives (Chap. XXI).

Exemple. — *Un capital de* $2743^f,75$ *est placé à intérêts composés au taux de* 4 *pour* 100 ; *quelle sera sa valeur au bout de* 12 *ans* 3 *mois ?*

$$a = 2743^f,75, \quad r = 0,04, \quad n = 12, \quad p = 90,$$

$$\log x = \log 2743^f,75 + 12 \log 1,04 + \log 1,01,$$

$$\begin{array}{r} \log 1,04 = 0,0170334 \\ \hline 12 \log 1,04 = 0,19440008 \\ \log 2743,75 = 3,4383445 \\ \log 1,01 = 0,00432137 \\ \hline \log x = 3,63706595 \\ x = 4335,75 \end{array}$$

245. Pour comparer les valeurs de plusieurs sommes payables à différentes époques, il faut rapporter toutes ces sommes à une même époque.

Un banquier doit une somme a payable dans n années, et il veut s'acquitter en donnant actuellement un billet payable dans p années. Quelle doit être la valeur x inscrite sur ce billet?

Le capital a payable dans n années vaut aujourd'hui $\frac{a}{(1+r)^n}$; le billet x payable dans p années vaut aujourd'hui $\frac{x}{(1+r)^p}$; on doit donc avoir

$$\frac{a}{(1+r)^n} = \frac{x}{(1+r)^p}, \quad \text{d'où} \quad x = a(1+r)^{p-n}.$$

ANNUITÉS.

246. *Un emprunt de a francs est fait au denier r à condition d'être remboursé par sommes égales payées d'année en année pendant n années; on demande la valeur de l'*annuité, *c'est-à-dire de la somme à donner tous les ans.*

Au bout de n années, on devra

$$a(1+r)^n.$$

Soit x la valeur de l'annuité; donner x à la fin de la première année revient à donner

$$x(1+r)^{n-1}$$

à la fin de la $n^{ième}$; de même donner x à la fin de la seconde année équivaut à donner

$$x(1+r)^{n-2}$$

à la fin de la $n^{ième}$, ainsi de suite; on aura donc

$$a(1+r)^n = x(1+r)^{n-1} + x(1+r)^{n-2} + x(1+r)^{n-3} + \ldots + x(1+r) + x,$$

$$a(1+r)^n = x[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r) + 1],$$

$$a(1+r)^n = x\frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

$$x = \frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

247. Pour $n = \infty$, on trouve $x = ar$; c'est le cas des *rentes perpétuelles*. Une rente perpétuelle est une somme qu'on doit toucher indéfiniment à la fin de chaque année. Une annuité de x francs payable pendant n années peut être considérée comme la différence de deux rentes perpétuelles de x francs le premier payement de la première ayant lieu dans un an, et celui de la seconde dans $n + 1$ ans. Les valeurs actuelles de ces rentes sont :

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{x}{r(1+r)^n}.$$

En égalant leur différence à la valeur actuelle a de l'annuité, on retrouve la formule du numéro précédent

$$\frac{x}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) = a, \quad \text{ou} \quad x = \frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Exemple. — *Une dette de* $11582^f,60$ *a été remboursée par des annuités de* 1500 *francs ; on demande quel a été le nombre de ces annuités, le taux étant de* 5 *pour* 100.

La formule précédente donne

$$n = \frac{\log x - \log(x - ar)}{\log(1+r)},$$

et l'on a

$$x = 1500, \quad a = 11582^f,60, \quad r = 0,05,$$

$$ar = 579,13, \quad x - ar = 920,87,$$

$$n = \frac{\log 1500 + C^t \log 920,87 - 10}{\log 1,05}.$$

$$\begin{array}{r} \log 920,87 = 2,9641983 \\ \hline C^t \log 920,87 - 10 = \bar{3},0358017 \\ \log 1500 = 3,1760913 \\ \hline 0,2118930 \end{array}$$

$$\log 1,05 = 0,0211893 0$$

$$n = \frac{0,2118930}{0,0211893} = 10$$

EXERCICES.

I. Calculer le logarithme de 6574 dans le système dont la base est 12.

II. Trouver la base du système dans lequel 13 est égal à son logarithme. Quel est le système dans lequel $\sqrt{7}$ est le logarithme de $\sqrt[3]{5}$?

III. Quelles sont les bases commensurables telles, que log 20 soit commensurable?

IV. Combien faut-il prendre de termes dans la suite naturelle des nombres pour que le produit

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11,\ldots,x$$

de ces termes sont supérieur à un nombre donné?

V. Quelle sera la valeur comptant d'une rente annuelle a qui s'accroît en proportion géométrique de raison q, en supposant qu'elle dure n années au denier r?

VI. Quelle est la valeur actuelle d'une rente annuelle qui doit durer n années au denier r, si elle croît comme la progression arithmétique d, $2d$, $3d$, de sorte qu'au bout de la première année on reçoive d, au bout de la seconde $2d$, etc.?

VII. Un centime ayant été placé au commencement de l'ère chrétienne à 4 pour 100, quelle sera sa valeur en 1860? Calculer le rayon de la sphère d'or qui équivaut à cette somme et comparer ce rayon à celui du globe terrestre.

VIII. Minimum de $A^{x^m}.B^{x^{-n}}$.

IX. Démontrer l'inégalité

$$\log\left(1+\frac{1}{10^{12}}\right)<\frac{1}{9.10^{11}}.$$

Déduire de là que, lorsqu'un nombre supérieur à 10000 prend deux accroissements successifs égaux à 0,01, la différence des

accroissements correspondants de son logarithme est moindre que $\frac{1}{9.10^{11}}$.

X. Déduire successivement de la formule qui donne le quotient $\frac{a^m - b^m}{a - b}$ (pour $a > b$) les relations

$$[a - m(a - b)]\, a^{m-1} < b^m, \quad \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right) < 4, \quad \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < 4.$$

XI. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \log x + \log y = \frac{p}{q}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a^4, \\ \log x + \log y = \frac{p}{q}. \end{cases}$$

XII. Trouver la somme de tous les triangles rectangles qu'on obtient en menant la hauteur issue du sommet de l'angle droit, puis du pied de cette hauteur une perpendiculaire sur l'un des côtés de l'angle droit, et ainsi de suite indéfiniment. Application au triangle dont les côtés sont 3, 4, 5.

Digitized by Google

CHAPITRE XVII.

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS.

DÉFINITION DES FONCTIONS. — CONTINUITÉ.

248. Lorsque deux quantités *variables* sont liées l'une à l'autre, de façon qu'à chaque valeur de l'une corresponde une valeur déterminée de l'autre, on dit que ces grandeurs sont *fonctions* l'une de l'autre.

Ainsi, dans un cercle, la surface est fonction du rayon, et inversement le rayon est fonction de la surface; cette dépendance mutuelle s'exprime par la formule $S = \pi r^2$. De même, l'espace parcouru par un corps qui tombe est une fonction du temps exprimée par la formule $e = \frac{1}{2} g t^2$, et réciproquement la durée de la chute est une fonction de l'espace parcouru donnée par la relation *inverse* $t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$.

On considère ordinairement l'une x des grandeurs comme variant d'une manière arbitraire, et on l'appelle *variable indépendante*, tandis qu'on réserve le nom de *fonction* à l'autre quantité y dont les variations sont réglées par celles de la première; et l'on écrit

$$y = f(x).$$

La dépendance de deux variables n'est pas toujours telle, qu'on puisse calculer l'une au moyen de l'autre; ainsi la force élastique maximum de la vapeur d'eau et la température varient l'une avec l'autre sans qu'on sache traduire leur liaison en formule exacte; la consommation d'une denrée est une fonction inconnue du prix de revient, etc. De pareilles fonctions, dites *empiriques*, ne peuvent être données que par l'observation; pour les définir, on construit

à l'aide d'expériences nombreuses et précises des Tables contenant, d'une part des valeurs très-voisines et très-multipliées de la variable, et d'autre part les valeurs correspondantes de la fonction. Nous citerons pour exemple le tableau suivant, qui donne les quantités de sulfate de soude dissoutes par 100 parties d'eau aux diverses températures :

TEMPÉRATURE.	SEL ANHYDRE dissous par 100 parties d'eau.	TEMPÉRATURE.	SEL ANHYDRE dissous par 100 parties d'eau.
0°00	5,02	32°73	50,65
11,67	10,12	33,88	50,04
13,30	11,74	40,15	48,78
17,91	16,73	45,04	47,81
25,05	28,11	50,40	46,82
28,76	37,35	59,79	45,52
30,75	43,05	70,61	44,35
31,84	47,37	84,42	42,96

249. Une variable est *continue* lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre sans acquérir toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction est *continue* lorsqu'en faisant varier d'une manière continue les quantités dont elle dépend, elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par tous les états intermédiaires.

Le caractère distinctif d'une fonction continue est de pouvoir prendre des accroissements aussi petits qu'on veut, quand la variable croît par degrés assez petits. Ainsi la fonction

$$y = ax$$

est une fonction continue de x, puisque son accroissement

$$a(x+h) - ax \quad \text{ou} \quad ah$$

correspondant à l'accroissement h de la variable, tend vers zéro à mesure que ce dernier devient de plus en plus petit.

Les grandeurs physiques sont en général des fonctions continues. *Natura non facit saltus.*

Digitized by Google

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS CONTINUES.

250. Revenons au tableau du n° 248 et arrêtons-nous à la température 32°,73, à laquelle la fonction change brusquement d'allure.

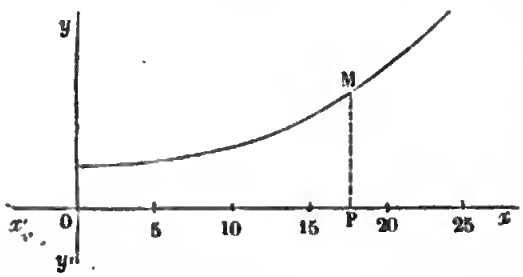
Soient xOx, $y'Oy$ deux axes rectangulaires indéfinis; supposons l'axe Ox divisé en parties égales, et incrivons aux points de division les nombres

$$0^\circ,01,\quad 0^\circ,02,\quad 0^\circ,03,\quad 0^\circ,04,\ldots,\quad 1^\circ,00,\quad 1^\circ,01\ldots;$$

puis par les points qui portent les numéros inscrits dans la première colonne du tableau, élevons des perpendiculaires égales (à une certaine échelle) aux nombres correspondants inscrits dans la deuxième colonne; joignons enfin par un trait continu les extrémités de ces perpendiculaires; la ligne ainsi obtenue a reçu le nom de *courbe de solubilité* du sulfate de soude.

Cette courbe a sur le tableau précédent deux avantages : d'abord elle montre plus nettement comment la solubilité varie avec la température; puis elle permet de trouver les solubilités qui correspondent aux températures intermédiaires. Veut-on, par exemple, la solubilité à la température $15^\circ\frac{1}{2}$; par le point P, marqué $15^\circ\frac{1}{2}$, sur l'axe Ox, on élève une perpendiculaire PM jusqu'à la rencontre de la courbe, et le nombre qui mesure cette perpendiculaire, à l'échelle adoptée, exprime la quantité de sel que l'eau dissout à cette température.

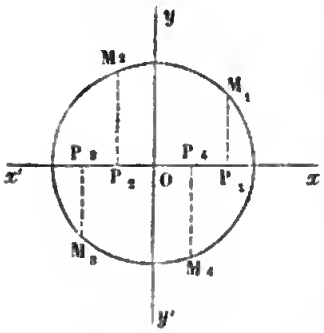
Fig. 20.



251. En général, quand on possède une Table des valeurs d'une fonction pour certaines valeurs de la variable ou une formule qui permet de construire cette Table, on obtient la *courbe représentative* de la fonction en portant sur l'axe Ox les valeurs de la variable et élevant des perpendiculaires égales aux valeurs correspondantes de la fonction.

Un point quelconque M d'une courbe est déterminé quand on donne les nombres qui mesurent la perpendiculaire MP et la distance OP; on donne à ces nombres le nom de *coordonnées* du point M; le premier est l'*ordonnée* et le second l'*abscisse* du point. Les coordonnées sont d'ailleurs susceptibles de signes; les abscisses positives sont comptées dans le sens Ox et les abscisses négatives dans le sens Ox'; de même, on porte les ordonnées au-dessus ou au-dessous de $x'Ox$, suivant qu'elles ont le signe + ou le signe —; ainsi en considérant un cercle ayant l'*origine* O pour centre, les *coordonnées* seront

Fig. 21.



$+ M_1 P_1$	$+ OP_1$	pour le point M_1,
$+ M_2 P_2$	$- OP_2$	pour le point M_2,
$- M_3 P_3$	$- OP_3$	pour le point M_3,
$- M_4 P_4$	$+ OP_4$	pour le point M_4.

On désigne les abscisses par x et les ordonnées par y.

282. Nous n'insisterons pas davantage sur l'utilité de la représentation graphique des fonctions empiriques. Les travaux de MM. Regnault et Despretz offrent des exemples remarquables et bien connus de ce genre d'opérations.

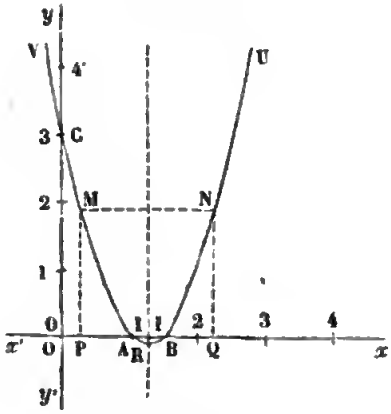
En analyse on emploie les courbes dans le seul but de donner une image sensible de la marche des fonctions. La ligne est une peinture frappante de la loi algébrique qui lie les variables entre elles, et ses inflexions, son allure montrent d'un coup d'œil ce qui ne ressortirait que péniblement de la discussion de l'équation.

Exemple. — *Étude de la fonction*

$$y = 2x^2 - 5x + 3.$$

Supposons les deux axes rectangulaires Ox et Oy divisés en parties égales, et marquons 1, 2, 3,... aux points de division.

Fig. 22.



La formule

$$y = 2(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

montre que l'ordonnée est nulle pour $x = 1$ et $x = \frac{3}{2}$, et qu'elle est égale à 3 pour $x = 0$. La courbe coupe donc l'axe Ox en A et B, et l'axe Oy en C.

x croissant à partir de $\frac{3}{2}$, les deux facteurs $x - 1$, $x - \frac{3}{2}$ sont positifs, et augmentent sans cesse; y croît donc sans limite en restant positif. De là la branche infinie BNU qui s'élève au-dessus de Ox en s'écartant aussi de Oy.

x décroissant à partir de 1, les deux facteurs $x - 1$, $x - \frac{3}{2}$ sont négatifs, et augmentent sans cesse en valeur absolue; y croît donc encore sans limite en restant positif. De là la branche infinie AMCV qui traverse Oy en C.

Enfin, quand x est compris entre 1 et $\frac{3}{2}$, les deux facteurs $x - 1$ $x - \frac{3}{2}$ sont de signes contraires, y est négatif, et l'on a un arc ARB, situé au-dessous de Ox, qui relie les deux branches VMA, UNB. Le point le plus bas R de cet arc correspond au maximum de $-y = 2(x-1)\left(\frac{3}{2} - x\right)$, lequel a lieu lors de l'égalité des facteurs $x - 1$ $\frac{3}{2} - x$, dont la somme est constante. L'abscisse de ce point R est donc la demi-somme $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right)$ de celles des points A et B, et R est sur la parallèle à Oy menée par le milieu I de AB à une distance $IR = \frac{1}{8}$.

Posons

$$x = \mathrm{OI} + \alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right) + \alpha,$$

il vient

$$y = 2\alpha^2 - \frac{1}{8};$$

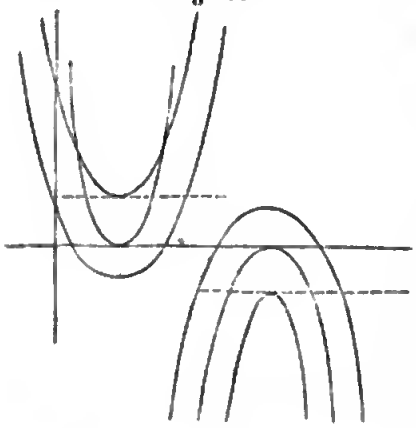
l'ordonnée y reste la même quand α change de signe. Si donc on prend, de part et d'autre de I, deux longueurs égales IQ, IP, et qu'on élève des perpendiculaires QN, PM jusqu'à la courbe, la figure MPQN sera un rectangle; en sorte que la courbe est symétrique par rapport à la parallèle à Oy menée par le milieu I de AB.

Les courbes représentatives de la fonction générale

$$y = ax^2 + bx + c$$

ont toutes une forme analogue à la précédente; ce sont des *paraboles* composées d'une double branche infinie et symétrique par rapport à une parallèle à Oy. Les branches infinies sont dirigées vers Oy ou vers Oy', suivant que a est positif ou négatif; car pour des valeurs suffisamment grandes de x, c'est le terme ax^2 qui donne son signe au trinôme. De plus, la courbe coupe Ox en deux points, est tangente à cet axe, ou ne le rencontre pas, suivant que l'équation

Fig. 23.



$$ax^2 + bx + c = 0$$

a ses racines réelles et inégales, réelles et égales ou imaginaires. Ces divers cas sont représentés dans la *fig.* 23.

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES FONCTIONS CONTINUES.

283. Les fonctions continues jouissent de certaines propriétés générales. Nous citerons d'abord la suivante, que Képler énonça le

premier (1615), et que Fermat prit plus tard (1635) pour base de sa théorie des maximums et des minimums :

Dans le voisinage d'un maximum ou d'un minimum, toute fonction continue reste à peu près stationnaire et ne varie que par degrés insensibles.

Ce fait ressort immédiatement de l'inspection des courbes. Quand l'ordonnée d'une courbe cesse de croître, c'est-à-dire passe par un maximum, ou cesse de diminuer, c'est-à-dire passe par un minimum, la tangente à la courbe devient parallèle à l'axe Ox; l'ordonnée de cette tangente devient donc constante. Or, comme au voisinage du point de contact on peut assimiler l'élément de la courbe à l'élément de la tangente, on voit que le petit arc de la courbe qui se trouve près du maximum ou du minimum a une ordonnée à peu près constante. La fonction représentée par cette ordonnée ne varie donc alors que par degrés insensibles.

Il résulte de là que, *pour chercher dans quelles circonstances une grandeur variable devient maximum ou minimum, il faut exprimer que cette grandeur considérée dans deux états successifs infiniment voisins a la même valeur : l'égalité résultante, prise à l'instant limite où les deux états successifs se confondent, fournit une propriété caractéristique du maximum ou du minimum.*

« Un tel caractère est philosophiquement d'autant plus convena-
» ble, qu'il constitue l'expression directe d'une remarque générale
» fréquemment suggérée par les divers phénomènes naturels qui
» présentent des exemples familiers de maximum ou de minimum,
» tels que les changements de la hauteur du soleil dans le cours de
» la journée, l'inégale durée des journées et des nuits aux diffé-
» rentes saisons, etc. En tous cas semblables, les observateurs
» judicieux ont toujours senti que l'état de maximum ou de mini-
» mum se trouve spontanément distingué des états antérieurs ou
» postérieurs par une sorte de station spéciale que rappellent
» quelquefois les dénominations consacrées, surtout quant aux
» saisons (solstices, *sol stat*). » (AUGUSTE COMTE, *Géométrie analytique.*)

Cette propriété trouve à chaque instant son application dans la mécanique industrielle, où l'on cherche souvent quelle disposition

il faut adopter, quelle valeur il faut donner à certaine grandeur dont on est maître, pour produire un travail déterminé avec le moins d'argent possible, ou un travail maximum avec une dépense déterminée.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU PRINCIPE PRÉCÉDENT.

254. *Trouver le maximum ou le minimum de $x^m + y^m$, sachant que $x + y$ est constant et égal à a.*

La fonction à rendre maximum ou minimum est

$$x^m + (a - x)^m.$$

En égalant deux valeurs voisines de cette fonction, on a la relation

$$(x + h)^m + (a - x - h)^m = x^m + (a - x)^m,$$

qu'on peut écrire

$$(x + h)^m - x^m + (a - x - h)^m - (a - x)^m = 0.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{(x + h)^m - x^m}{(x + h) - x} = (x + h)^{m-1} + x(x + h)^{m-2}$$
$$+ x^2(x + h)^{m-3} + \ldots + x^{m-2}(x + h) + x^{m-1},$$

ou

$$(x + h)^m - x^m = h\left[\begin{array}{c}(x + h)^{m-1} + x(x + h)^{m-2} \\ + x^2(x+h)^{m-3} + \ldots + x^{m-2}(x+h) + x^{m-1}\end{array}\right],$$

et de même

$$(a - x - h)^m - (a - x)^m$$
$$= -h\left[\begin{array}{c}(a - x - h)^{m-1} + (a - x)(a - x - h)^{m-2} + \ldots \\ + (a - x)^{m-2}(a - x - h) + \ldots + (a - x)^{m-1}\end{array}\right];$$

en sorte que la relation (1) devient

$$h[(x + h)^{m-1} + x(x + h)^{m-2} + \ldots + x^{m-1}]$$
$$= h\left[\begin{array}{c}(a - x - h)^{m-1} + (a - x)(a - x - h)^{m-2} + \ldots \\ + (a - x)^{m-1}\end{array}\right],$$

ou, en supprimant le facteur h et faisant $h = 0$,

$$mx^{m-1} = m(a - x)^{m-1},$$
$$x^{m-1} = (a - x)^{m-1},$$
$$x = a - x,$$
$$x = \frac{a}{2},$$

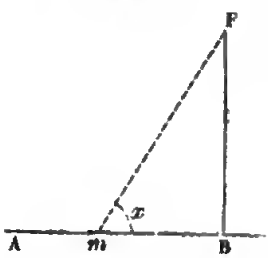
et, par suite,

$$y = a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Ainsi, soit pour le maximum, soit pour le minimum, les deux parties x et y doivent être égales. On voit d'ailleurs aisément qu'il y a maximum ou minimum, suivant que m est $>$ ou $<$ 1.

235. *Un disque m placé sur une table horizontale* AB *est éclairé par une lampe* F *dont le pied est à une distance fixe* B$m = a$ *du centre m du disque; à quelle hauteur* FB $= h$ *doit-on fixer la lampe* F *pour que le disque reçoive le maximum d'éclairement.*

Fig. 24.



Soit x l'angle variable BmF; A l'intensité de la lumière reçue normalement à l'unité de distance du foyer F; sous l'incidence x, et à la distance F$m = \frac{a}{\cos x}$, la quantité de lumière reçue sera

$$\frac{A \sin x}{\frac{a^2}{\cos^2 x}}, \quad \text{ou} \quad \frac{A}{a^2} \sin x \cos^2 x, \quad \text{ou} \quad \frac{A}{a^2}(\sin x - \sin^3 x).$$

C'est donc la fonction

$$\sin x - \sin^3 x$$

qu'il faut rendre maximum; égalant deux valeurs très-voisines de la fonction, on a

$$\sin x - \sin^3 x = \sin(x + h) - \sin^3(x + h),$$

ou

$$\frac{\sin^3(x + h) - \sin^3 x}{\sin(x + h) - \sin x} = 1,$$

ou

$$\sin^2(x+h) + \sin x \sin(x+h) + \sin^2 x = 1,$$

et en passant à la limite, c'est-à-dire en faisant $h = 0$,

$$3\sin^2 x = 1;$$

d'où

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

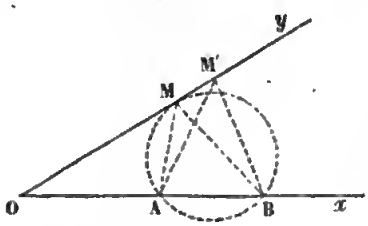
Telle est la valeur de x, qui répond à un éclairement maximum. Il est d'ailleurs évident qu'ici c'est bien un maximum qui a lieu, puisque l'éclairement est nul soit pour $x = 0$, soit pour $x = \frac{\pi}{2}$.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

256. *Trouver le point* M *de la droite* Oy, *d'où l'on voie la longueur* AB *sous un angle* AMB *maximum.*

Soit M′ un point infiniment voisin du point inconnu M; l'égalité des angles (255) AMB, AM′B exige que le quadrilatère MM′AB soit inscriptible. A la limite, quand M′ se confond avec M, la droite Oy est tangente, et la recherche du point M revient à trouver le point de contact d'un cercle passant par deux points donnés A et B et tangent à une droite donnée Oy; en d'autres termes, la distance OM est moyenne proportionnelle entre OA et OB.

Fig. 25.

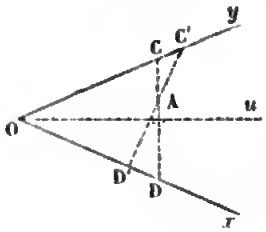


On reconnaît, en effet, à posteriori que tout point de Oy autre que le point de contact M, étant hors du cercle, est le sommet d'un angle moindre que AMB.

257. *Par le point* A *pris dans l'intérieur d'un angle* yOx, *mener une sécante* CD *telle, que le rectangle* AC.AD *soit minimum.*

Soit C′D′ une sécante infiniment voisine de la sécante cherchée

Fig. 26.



CD; le quadrilatère CC′DD′ est inscriptible, puisqu'on a

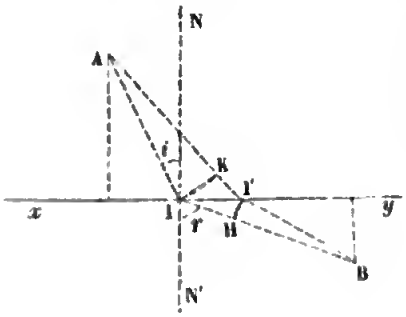
$$AC.AD = AC'.AD'.$$

Le cercle qui passe par les quatre sommets devient tangent en C et D aux côtés de l'angle yOx; la corde de contact CD doit donc être perpendiculaire sur la bissectrice OAu.

258. Problème de Fermat. — *Étant donnés deux points* A *et* B *situés dans deux milieux différents que sépare la droite* xy, *et* v, v' *désignant la vitesse de propagation de la lumière dans les deux milieux, on demande le chemin* AIB *que doit suivre une molécule lumineuse pour aller du premier point au second dans un temps minimum.*

Soit I′ un point voisin de I. Décrivons de A et B comme centres avec AI et BI′ pour rayons les deux arcs IK, I′H. La différence des temps qu'emploie la lumière à parcourir les chemins AIB, AI′B a pour expression

Fig. 27.



$$\frac{I'K}{v} - \frac{IH}{v'}$$
$$= II'\left(\frac{1}{v}\frac{\sin I'IK}{\sin IKI'} - \frac{1}{v'}\frac{\sin II'H}{\sin IHI'}\right).$$

En exprimant que cette différence est nulle à la limite, et désignant par i et r les angles d'incidence AIN et de réfraction BIN′, on trouve

$$\frac{1}{v}\sin i = \frac{1}{v'}\sin r \quad \text{ou} \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}.$$

C'est la loi de Descartes.

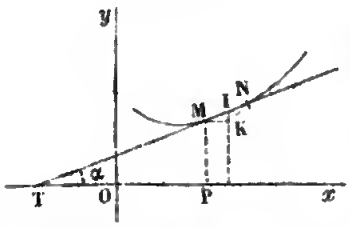
SECONDE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES FONCTIONS CONTINUES.

259. L'inspection des courbes met encore en évidence une autre propriété très-importante des fonctions continues :

A des variations très-petites de la variable x, à partir d'une valeur déterminée, correspondent des variations de la fonction sensiblement proportionnelles.

Puisque dans le voisinage du point de contact on peut assimiler l'élément de la courbe à celui de la tangente, on voit que dans l'étendue MN de cet élément commun, le rapport $\frac{IK}{MK}$ de la différence des ordonnées à celle des abscisses est constant et égal à la tangente trigonométrique de l'inclinaison $IMK = \alpha$ de la droite MT sur l'axe Ox.

Fig. 28.



Ce principe est très-utile dans les mathématiques appliquées; toutes les fois qu'une variable x oscille autour d'une valeur moyenne x_0 dont elle s'écarte très-peu, en d'autres termes, lorsqu'on a $x = x_0 + z$, z étant un nombre variable très-petit par rapport à la constante x_0, on peut, sans erreur sensible, remplacer toute fonction mathématique ou empirique, connue ou inconnue de x, par $A + Bz$ où A et B sont des nombres constants.

Nous avons d'ailleurs appliqué déjà ce principe en faisant usage de la proportion tabulaire $\frac{x}{\Delta} = \frac{d}{1}$ ou $x - \Delta d = 0$ pour la recherche des logarithmes des nombres supérieurs à 10^4.

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. — HOMOGÉNÉITÉ.

260. Une grandeur dépend souvent de plusieurs autres; ainsi le poids d'un corps est une fonction de quatre variables, ses trois dimensions et sa densité. Outre les variables, il entre quelquefois dans la détermination d'une fonction des quantités qui restent constantes dans la question que l'on traite; aussi, pour un lieu donné, l'intensité g de la pesanteur ne varie pas, et la durée des oscillations du pendule dépend de sa longueur variable et de la constante g. Pour exprimer qu'une quantité u est une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$, on emploie la notation

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

et l'on écrit

$$u = f(x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma \ldots)$$

pour montrer que la fonction contient en outre des constantes ou *paramètres* α, β, γ, ...

Les fonctions mathématiques se subdivisent en *algébriques* et *transcendantes :* les premières sont celles où les seules opérations indiquées sont des additions, soustractions, multiplications, divisions, élévations à des puissances entières ou fractionnaires, mais de degrés connus; les autres sont celles qui renferment d'autres opérations indiquées sur les variables; tels sont, par exemple, les quantités exponentielles a^x, les logarithmes, les lignes trigonométriques, ...

261. On dit en général qu'une fonction $f(a, b, c, \ldots)$ est *homogène* par rapport aux lettres a, b, c, ..., lorsqu'on a

$$f(ka, kb, kc, \ldots = k^m f(a, b, c, \ldots),$$

où k désigne un nombre indéterminé quelconque; l'exposant m est dit le *degré* d'homogénéité.

Exemples. — La fonction $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ est homogène et de degré -2, car on a

$$\left(\frac{1}{k^2 a^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{k^2 b^2}\right)^2 = \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = k^{-2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

De même, la fonction $\frac{3a + \sqrt{ab}}{2a + 5c}$ est homogène et de degré 0; car on a

$$\frac{3(ka) + \sqrt{ka.kb}}{2ka + 5kc} = \frac{3a + \sqrt{ab}}{2a + 5b} = k^0 \frac{3a + \sqrt{ab}}{2a + 5b}.$$

Dans le cas d'un polynôme entier, tous les termes doivent avoir même degré, et l'on retrouve la définition du n° 29.

Théorème. — *Lorsqu'on traite par l'algèbre une question quelconque de géométrie en laissant indéterminée l'unité de longueur,*

toutes les relations telles que $f(a, b, c, \ldots) = 0$, *auxquelles on parvient entre les nombres* $a, b, c, \ldots$, *qui mesurent les diverses lignes* A, B, C, ... *de la figure, ont leur premier membre* $f(a, b, c, \ldots)$ *homogène.*

En effet, les raisonnements et les calculs qui ont conduit à la relation

$$(1) \qquad f(a, b, c, \ldots) = 0,$$

sont indépendants de l'unité de longueur adoptée; si donc on avait choisi la ligne A pour unité de longueur, on eût trouvé entre les nombres $1, b', c', \ldots$ qui auraient mesuré les diverses lignes de la figure, la relation de même forme

$$(2) \qquad f(1, b', c', \ldots) = 0;$$

or on a

$$b' = \frac{b}{a}, \quad c' = \frac{c}{a}, \ldots,$$

puisque le rapport des nombres qui mesurent deux grandeurs est indépendant de l'unité choisie. L'équation (2) devient donc

$$(3) \qquad f\left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right) = 0,$$

et comme cette nouvelle relation est homogène et de degré zéro, l'équation (1) qu'on obtient en multipliant (3) par la plus haute puissance a^m de a qui entre au dénominateur, est homogène et de degré m.

262. La démonstration ne suppose pas que la fonction $f(a, b, c, \ldots)$ soit algébrique. Elle indique, en outre, le moyen de rétablir l'homogénéité dans une équation qui provient d'un problème où l'on a pris pour unité l'une des lignes de la figure. Il faut, en désignant l'unité par i, diviser par i chaque lettre qui représente une ligne, puis chasser les dénominateurs. Ajoutons que les lettres qui désignent des surfaces ou des volumes doivent, conformément aux règles de la géométrie, être traitées comme des produits de deux ou de trois lignes; enfin les lettres qui repré-

sentent des angles ou des fonctions circulaires n'exprimant que des rapports de deux lignes, sont des facteurs du degré zéro, et l'on doit en faire abstraction dans l'application du théorème précédent.

Ainsi entendu, le principe de l'homogénéité offre un moyen très-précieux de vérification. Dans toute recherche géométrique où l'unité est restée indéterminée, si l'on rencontre dans le cours du calcul une équation non homogène, il faut s'arrêter et conclure que les raisonnements ou les calculs sont fautifs.

Ce principe fournit même les démonstrations les plus simples et les plus directes de certaines propositions fondamentales de la géométrie et de la mécanique (*voir* la Note II de la *Géométrie* de Legendre, et le n° 26 de la *Mécanique* de Poisson, 2e édition). Nous ne citerons qu'un exemple :

La surface d'un triangle est évidemment une fonction de ses côtés a, b, c et de ses angles A, B, C; d'ailleurs cette fonction $\varphi(a, b, c, A, B, C)$ étant homogène et du second degré, on doit avoir

$$\varphi(ka, kb, kc, A, B, C) = k^2\varphi(a, b, c, A, B, C).$$

Or le premier membre représente la surface de tous les triangles semblables au triangle proposé, puisque les angles sont les mêmes, et que les côtés sont proportionnels; la relation précédente exprime donc que *les aires de deux triangles semblables ont un rapport égal à k^2*, c'est-à-dire *au rapport des carrés de deux côtés homologues quelconques.*

EXERCICES.

I. Soit V une fonction homogène et du second degré de n quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$; démontrer qu'on a

$$V = V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2,$$

$V_1, V_2, \ldots, V_n$ étant des fonctions linéaires qui renferment respectivement $n, n-1, \ldots, 1$ quantités.

II. Trouver sur une courbe donnée un point M tel, que le tri-

angle formé par la tangente et les deux axes de coordonnées soit maximum ou minimum. — Même question en substituant au triangle le rectangle construit sur l'abscisse et l'ordonnée du point M.

III. Trouver sur une courbe donnée un point H tel, que la somme de ses distances à deux points fixes A et B placés dans le plan de la courbe soit maximum ou minimum.

IV. On donne une courbe et une corde fixe AB, trouver sur cette corde un point M tel, que la corde AB soit maximum ou minimum parmi toutes celles qui passent en M. — Même question en substituant le produit des segments MA et MB à la longueur de la corde.

V. Parmi toutes les cordes de même longueur inscrites dans une courbe donnée, trouver celle qui retranche le plus grand ou le plus petit segment.

VI. Construire les courbes représentatives des fonctions

$$y = \sin x, \quad y = \operatorname{tang} x, \quad y = \cos x,$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-a)(x-b)}{x+a}}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE XVIII.

COMBINAISONS. — DÉTERMINANTS.

DÉFINITIONS.

263. On appelle combinaisons n à n de m objets les différents groupes que l'on peut obtenir en réunissant de toutes les manières possibles n de ces objets. Les combinaisons reçoivent d'ailleurs le nom d'*arrangements* ou de *produits différents* selon que l'on regarde ou non comme distincts les groupes qui, étant composés des mêmes objets, ne diffèrent que par l'ordre dans lequel ces objets se succèdent. Nous allons apprendre à former les combinaisons et à en calculer le nombre.

ARRANGEMENTS.

264. Soient, par exemple, les quatre lettres a, b, c, d. Pour former leurs arrangements deux à deux, il suffit d'écrire successivement à la droite de chacune d'elles les trois autres; on trouve ainsi

$$\begin{array}{llll} ab, & ba, & ca, & da, \\ ac, & bc, & cb, & db, \\ ad, & bd, & cd, & dc. \end{array}$$

On obtient les arrangements trois à trois en écrivant successivement à la droite de chacun des arrangements deux à deux les deux lettres qui n'en font pas partie. Ces arrangements sont

$$\begin{array}{llllll} abc, & acb, & adb, & bac, & bca, & bda, \\ abd, & acd, & adc, & bad, & bcd, & bdc, \\ cab, & cba, & cda, & dab, & dba, & dca, \\ cad, & cda, & cdb, & dac, & dbc, & dcb. \end{array}$$

On continuerait de même.

En général, pour former les arrangements n à n de m objets, il faut placer successivement à la droite de chacun des arrangements $n-1$ à $n-1$ les $m-(n-1)$ objets qui n'y entrent pas. En effet : 1° on forme bien ainsi tous les arrangements n à n; car tout arrangement de n objets se compose du dernier objet précédé d'un arrangement formé avec les $n-1$ autres; 2° aucun arrangement n'est répété, puisque deux quelconques des groupes ainsi obtenus diffèrent, soit par le dernier objet, soit par l'ensemble des $n-1$ premiers objets.

D'après cela, désignons en général par A_n^m le nombre des arrangements de m objets n à n. Puisque chaque arrangement $n-1$ à $n-1$ fournit $m-(n-1)$ arrangements n à n, on a la relation

$$A_n^m = (m-n+1)\,A_{n-1}^m,$$

qui, pour $n = 2, 3, 4, \ldots, n$, donne successivement

$$A_2^m = (m-1)\,A_1^m, \quad A_3^m = (m-2)\,A_2^m,$$

$$A_4^m = (m-3)\,A_3^m, \ldots, \quad A_n^m = (m-n+1)\,A_{n-1}^m.$$

En multipliant et observant que $A_1^m = m$, on obtient la formule

$$A_n^m = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1).$$

PERMUTATIONS

265. Lorsque les nombres m et n sont égaux, tous les objets figurent dans chaque groupe; ces arrangements qui ne diffèrent que par la disposition des objets, prennent le nom de *permutations*. En désignant par P_m le nombre des permutations de m objets, on a la formule

$$P_m = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 3.2.1.$$

On désigne souvent le produit $1.2.3\ldots m$ par la notation $m!$

Voici la marche à suivre pour former les permutations. Deux lettres a et b ne donnent lieu qu'à deux permutations ab et ba. Dans le cas de trois lettres a, b, c, on met c à la droite de cha-

cune des permutations ab et ba, puis on fait avancer successivement cette lettre d'un rang de droite à gauche jusqu'à la première place. Ainsi la permutation ab fournit

$$abc, \quad acb, \quad cab,$$

et la permutation ba

$$bac, \quad bca, \quad cba.$$

En général, étant données toutes les permutations de $m-1$ objets, on forme les permutations de m objets en mettant le $m^{ième}$ à droite de chacune des permutations précédentes, et le faisant avancer successivement d'un rang de droite à gauche jusqu'à la première place.

PRODUITS DIFFÉRENTS.

266. Lorsqu'on a tous les produits différents de m objets n à n, on obtient les arrangements correspondants en faisant dans chacun de ces produits toutes les permutations de n objets. En effet, 1° on forme ainsi tous les arrangements des m objets n à n, puisqu'un arrangement quelconque ne diffère de l'un des produits que par la disposition des objets; 2° aucun arrangement n'est répété, car ceux qui naissent d'un même produit, diffèrent par l'ordre des objets, et ceux qui proviennent de deux produits différents ne sont pas composés des mêmes objets. Si donc on désigne par C_n^m le nombre des produits différents de m objets n à n, on a, puisque chaque produit forme $1.2\ldots n = P_n$ arrangements,

$$A_n^m = C_n^m P_n;$$

d'où

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}.$$

267. Nous ferons sur cette formule deux remarques utiles :

1°. Le nombre des produits de m objets n à n étant nécessairement entier, on a ce théorème d'arithmétique : *Le produit de n nombres entiers consécutifs est toujours divisible par le produit des n premiers nombres.*

2°. En multipliant haut et bas par $1.2.3\ldots(m-n)$, on trouve

$$C_n^m = \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots n \times 1.2.3\ldots(m-n)},$$

et comme le second membre reste le même quand on change n en $m-n$, on voit que *avec m objets on peut faire autant de produits n à n que de produits m — n à m — n*. Ce théorème est d'ailleurs évident à priori; car lorsqu'on prend n objets sur m, il en reste $m-n$, en sorte que les produits n à n et les produits $m-n$ à $m-n$ se correspondent deux à deux.

268. Voici la marche à suivre pour former les produits différents. Soient les cinq lettres a, b, c, d, e. Les produits deux à deux s'obtiennent en multipliant chaque lettre successivement par celles qui suivent; ce sont

$$\begin{array}{llll} ab, & bc, & cd, & de. \\ ac, & bd, & ce, & \\ ad, & bc, & & \\ ae, & & & \end{array}$$

On forme les produits trois à trois en multipliant chacun des produits qui précèdent successivement par les diverses lettres qui suivent le dernier facteur du produit considéré; on trouve ainsi

$$\begin{array}{llllll} abc, & acd, & ade, & bcd, & bde, & cde. \\ abd, & ace, & & bce, & & \\ abc, & & & & & \end{array}$$

En général, pour former les produits de m objets n à n, il faut mettre à la droite de chaque produit de l'ordre précédent les différents objets qui suivent celui qui termine ce produit.

PERMUTATIONS AVEC RÉPÉTITION.

269. *Le nombre des permutations que l'on peut faire avec les objets distincts a, b, c,... l, en prenant chacun d'eux un nombre de fois*

respectivement égal à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, *est donné par la formule*

$$(1) \qquad \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!}$$

dans laquelle

$$m = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

En effet, m objets distincts

$$a_1 a_2, \ldots a_\alpha, \quad b_1, b_2, \ldots b_\beta, \ldots, l_1, l_2, \ldots l_\lambda$$

donneraient lieu à $m!$ permutations. Concevons ces permutations classées en groupes tels, que dans chacun d'eux, pour passer d'une permutation à l'autre, il suffise de permuter entre eux les objets $a_1 a_2 \ldots a_\alpha$; chaque groupe contiendra $\alpha!$ permutations, qui se réduiront à une seule lorsque les α objets $a_1 a_2 \ldots a_\alpha$ deviendront égaux à a; le nombre total des permutations se réduira alors à celui des groupes précédents, c'est-à-dire à $\frac{m!}{\alpha!}$. On voit de même que, quand les objets $b_1 b_2 \ldots b_\beta$ seront remplacés par b, le nombre des permutations devra être divisé par $\beta!$, et ainsi de suite. En sorte que la formule finale est bien la formule (1).

PROBABILITÉS.

270. Dans les jeux de hazard la forme du jeu détermine un certain nombre de combinaisons qui peuvent toutes se réaliser également et qui se distribuent en deux catégories : celles qui sont favorables au joueur et celles qui le font perdre. Ce que le joueur à intérêt à connaître, c'est moins le nombre absolu des cas favorables ou contraires, que le *rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas.* Ce rapport a reçu le nom de *probabilité.* Voici quelques exemples :

Une urne contient 50 boules dont 30 blanches et 20 noires; le joueur qui parie pour l'extraction d'une boule blanche a une probabilité de gagner égale à $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$, et la probabilité de son adversaire est $\frac{2}{5}$.

D'un jeu complet de 52 cartes on a extrait les 13 cartes d'une même couleur, et on les a assemblées au hasard. Quelle est la probabilité d'amener pour les deux premières cartes un roi et une dame? Le nombre des dispositions possibles pour les 13 cartes est 1.2.3...13, et après qu'on a fixé le roi et la dame au premier et au second rang, il ne reste que 11 cartes qu'on ne peut disposer que de 1.2.3...11 manières; la probabilité cherchée est donc

$$\frac{1.2.3\ldots11}{1.2.3\ldots11.12.13}=\frac{1}{12.13}=\frac{1}{156}.$$

Ce sont des problèmes analogues qui ont donné lieu à la théorie des combinaisons; cette théorie, dont on trouve les premières traces dans la *logistique* de Jean Butteo (1559), est due à proprement parler aux travaux de Pascal, Fermat, Leibnitz, Bernoulli.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

271. *Définitions.* — Désignons en général par a_v^h une quantité qui change de valeurs lorsqu'on fait varier les indices h et v, et qui n'est nullement la puissance h de a_v. Si chacun de ces indices peut recevoir les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, a_v^h représentera l'une quelconque des n^2 quantités

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_v^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_v^2 & \ldots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_v^3 & \ldots & a_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & \ldots & a_v^4 & \ldots & a_n^4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_v^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Dans le produit $a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \ldots a_n^n$ permutons les indices inférieurs de toutes les manières possibles; et ajoutons les $n!$ produits ainsi formés en assignant à chacun d'eux le signe + ou le signe — suivant l'imparité ou la parité du nombre des indices inférieurs que

l'on permute dans le produit $a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \ldots a_n^n$, regardé comme positif, pour avoir le produit que l'on considère. L'expression ainsi obtenue est ce qu'on nomme le *déterminant* des n^2 quantités dont a_ν^h est le type ; on désigne ce déterminant par le tableau (1) où tous les éléments apparaissent d'une manière explicite. Deux éléments tels que a_ν^h, a_h^ν, sont dits *conjugués* ; a_1^1, a_2^2, ... a_n^n, sont appelés éléments *principaux*, et leur nombre n indique l'*ordre* du déterminant. Ainsi les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1\, a_2^2 - a_2^1\, a_1^2$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 - a_1^1 a_3^2 a_2^3 + a_2^1 a_3^2 a_1^3 - a_2^1 a_1^2 a_3^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - a_3^1 a_2^2 a_1^3$$

sont l'un du second ordre et l'autre du troisième. Pour fixer les idées, nous prendrons désormais pour exemple dans nos démonstrations le déterminant du troisième ordre ; les raisonnements ne perdront rien de leur généralité et ils seront plus faciles à saisir.

272. *Loi de formation.* — Le second membre de l'égalité (2) peut s'écrire

$$a_1^1\,(a_2^2\, a_3^3 - a_3^2\, a_2^3) - a_2^1\,(a_1^2\, a_3^3 - a_3^2\, a_1^3) + a_3^1\,(a_1^2\, a_2^3 - a_2^2\, a_1^3),$$

en sorte qu'on a

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

on trouverait de même pour la valeur de ce déterminant

$$-a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_2^2 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_3^2 \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

ou encore

$$a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_1^3 \end{vmatrix} - a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_1^3 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

etc.

On voit ainsi que *pour avoir la valeur algébrique d'un déterminant écrit symboliquement, il faut multiplier respectivement chacun des éléments d'une même ligne ou colonne par le déterminant de degré immédiatement inférieur qu'on trouve en effaçant dans le déterminant donné la ligne et la colonne dont fait partie l'élément considéré; on ajoute ensuite ces produits en assignant à chacun d'eux le signe + ou le signe — suivant que les deux indices de l'élément considéré sont de même parité ou de parités différentes.*

Ainsi, en désignant par Δ le déterminant du $n^{ième}$ ordre (1), et par α_ν^h le déterminant du $(n-1)^{ième}$ ordre,

$$(3)\quad \alpha_\nu^h = \pm \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_{\nu-1}^1 & a_{\nu+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{\nu-1}^2 & a_{\nu+1}^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{h-1} & a_2^{h-1} & \dots & a_{\nu-1}^{h-1} & a_{\nu+1}^{h-1} & \dots & a_n^{h-1} \\ a_1^{h+1} & a_2^{h+1} & \dots & a_{\nu-1}^{h+1} & a_{\nu+1}^{h+1} & \dots & a_n^{h+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_{\nu-1}^n & a_{\nu+1}^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

qu'on obtient en supprimant dans (1) la colonne ν et la ligne h, on a

$$(4)\qquad \Delta = a_\nu^1 \alpha_\nu^1 + a_\nu^2 \alpha_\nu^2 + a_\nu^3 \alpha_\nu^3 + \dots \quad + a_\nu^n \alpha_\nu^n,$$

$$(4')\qquad \Delta = a_1^h \alpha_1^h + a_2^h \alpha_2^h + a_3^h \alpha_3^h + \dots \quad + a_n^h \alpha_n^h.$$

Exemple. — En appliquant ces règles aux déterminants

$$\begin{matrix} \lambda & \lambda & 1 \\ & 1 & \lambda \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \lambda & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{matrix}$$

dont la loi est évidente, on trouve

$$\lambda,\ \lambda^2-1^2,\ \lambda(\lambda^2-2^2),\ (\lambda^2-1^2)(\lambda^2-3^2),\ \lambda(\lambda^2-2^2)(\lambda^2-4^2),$$
$$(\lambda^2-1^2)(\lambda^2-3^2)(\lambda^2-5^2),\quad \text{etc.}$$

273. *Propriétés générales.* — De la loi de formation qui précède résultent quelques théorèmes généraux qu'il suffira d'énoncer :

1°. *On n'altère ni la valeur ni le signe d'un déterminant en changeant respectivement les lignes en colonnes et les colonnes en lignes. On change au contraire le signe, sans altérer la valeur absolue, lorsqu'on remplace l'une par l'autre deux lignes ou deux colonnes ; d'où il résulte qu'un déterminant s'annule lorsque deux lignes ou deux colonnes deviennent identiques. Un déterminant est encore nul lorsque tous les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne sont égaux à zéro.*

2°. *En multipliant par une même quantité tous les termes d'une même ligne ou d'une même colonne, on multiplie le déterminant par cette quantité.*

3°. *Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont chacun la somme de plusieurs quantités, le déterminant est égal à la somme d'autant de déterminants qu'il y a de ces quantités ;* ainsi l'on a

$$\begin{vmatrix} a_1+k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Si les quantités ajoutées k_1, k_2, k_3 sont les termes b_1, b_2, b_3 ou c_1, c_2, c_3 d'une autre colonne du déterminant primitif, ou ne diffèrent de ces termes que par un facteur constant, le second déterminant du deuxième membre s'évanouit ; ainsi l'on a

$$\begin{vmatrix} a_1+mb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4°. D'après l'équation (4), l'expression

$$a_h^1\,\alpha_\nu^1 + a_h^2\,\alpha_\nu^2 + a_h^3\,\alpha_\nu^3 + \ldots + a_h^n\,\alpha_\nu^n,$$

dans laquelle on suppose h et v inégaux, représente ce que devient le déterminant Δ lorsqu'on substitue les éléments $a_h^1, a_h^2, \ldots, a_h^n$ aux éléments $a_v^1, a_v^2, \ldots, a_v^n$. Mais puisque ces deux séries d'éléments constituent chacune une colonne du déterminant Δ, l'expression précédente représentera un déterminant ayant deux colonnes identiques et sera par suite nulle. On aura donc

$$(5) \qquad a_h^1 \alpha_v^1 + a_h^2 \alpha_v^2 + a_h^3 \alpha_v^3 + \ldots + a_h^n \alpha_v^n = 0.$$

L'équation (4′) donnerait de même

$$(5') \qquad a_1^v \alpha_1^h + a_2^v \alpha_2^h + a_3^v \alpha_3^h + \ldots + a_n^v \alpha_n^h = 0.$$

274. *Résolution générale des équations du premier degré.* — Les relations (4) et (5) conduisent aisément aux valeurs générales des inconnues d'un système quelconque d'équations du premier degré.

Soit le système

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + a_3^1 x_3 + \ldots + a_n^1 x_n = u_1, \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 + \ldots + a_n^2 x_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^n x_1 + a_2^n x_2 + a_3^n x_3 + \ldots + a_n^n x_n = u_n. \end{array} \right.$$

Multiplions ces équations respectivement par $\alpha_v^1, \alpha_v^2, \ldots, \alpha_v^n$ et ajoutons. Dans la somme, les coefficients des diverses inconnues, sauf celui de x_v, seront nuls, puisque leur composition est la même que celle du premier membre de la relation (5); et le coefficient de x_v sera égal à Δ en vertu de l'équation (4). On aura donc

$$\Delta . x_v = u_1 \alpha_v^1 + u_2 \alpha_v^2 + u_3 \alpha_v^3 + \ldots + u_n \alpha_v^n$$

ou

$$(7) \qquad x_v = \frac{u_1 \alpha_v^1 + u_2 \alpha_v^2 + u_3 \alpha_v^3 + \ldots + u_n \alpha_v^n}{a_v^1 \alpha_v^1 + a_v^2 \alpha_v^2 + a_v^3 \alpha_v^3 + \ldots + a_v^n \alpha_v^n};$$

de là cette proposition :

1°. *Les valeurs qui vérifient un système quelconque de n équa-*

tions du premier degré à n inconnues ont pour dénominateur commun le déterminant Δ des coefficients des inconnues dans ces équations.

2°. *Le numérateur de la valeur d'une inconnue quelconque s'obtient en remplaçant dans ce dénominateur les divers coefficients de l'inconnue considérée par les termes tous connus correspondants.*

Ces numérateurs sont encore des déterminants de l'ordre n, dans lesquels les termes tout connus forment la colonne qui dans le déterminant Δ se compose des coefficients de l'inconnue considérée.

C'est ce théorème déduit de l'observation par Cramer (1750), et démontré par Laplace (1772), qui a donné naissance à la théorie des *déterminants*. Depuis, grâce aux travaux de Lagrange, Vandermonde, Gauss, Jacobi, Cauchy, Sylvester, Hesse, etc., cette théorie a acquis une très-grande importance en raison de l'étendue et de la variété de ses applications dans les diverses branches des mathématiques. « La théorie des déterminants, » dit M. Sylvester, « est une algèbre au-dessus de l'algèbre, un calcul » qui nous permet de combiner et de prédire les résultats des » opérations algébriques, de la même manière que l'algèbre nous » dispense de l'exécution des opérations particulières de l'arith- » métique. »

275. *Multiplication des déterminants.* — Soient les deux systèmes

$$a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + a_3^1 x_3 = u_1,$$
$$a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + a_3^2 x_3 = u_2,$$
$$a_1^3 x_1 + a_2^3 x_2 + a_3^3 x_3 = u_3,$$

$$b_1^1 y_1 + b_1^2 y_2 + b_1^3 y_3 = x_1,$$
$$b_2^1 y_1 + b_2^2 y_2 + b_2^3 y_3 = x_2,$$
$$b_3^1 y_1 + b_3^2 y_2 + b_3^3 y_3 = x_3.$$

Substituons dans le premier système les valeurs de x_1, x_2, x_3 tirées

du second; en faisant, pour abréger,

$$a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1 + a_3^1 b_3^1 = c_1^1,$$
$$a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1 + a_3^2 b_3^1 = c_1^2,$$
$$a_1^3 b_1^1 + a_2^3 b_2^1 + a_3^3 b_3^1 = c_1^3,$$

$$a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2 + a_3^1 b_3^2 = c_2^1,$$
$$a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 = c_2^2,$$
$$a_1^3 b_1^2 + a_2^3 b_2^2 + a_3^3 b_3^2 = c_2^3,$$

$$a_1^1 b_1^3 + a_2^1 b_2^3 + a_3^1 b_3^3 = c_3^1,$$
$$a_1^2 b_1^3 + a_2^2 b_2^3 + a_3^2 b_3^3 = c_3^2,$$
$$a_1^3 b_1^3 + a_2^3 b_2^3 + a_3^3 b_3^3 = c_3^3,$$

on obtient les équations

$$c_1^1 y_1 + c_2^1 y_2 + c_3^1 y_3 = u_1,$$
$$c_1^2 y_1 + c_2^2 y_2 + c_3^2 y_3 = u_2,$$
$$c_1^3 y_1 + c_2^3 y_2 + c_3^3 y_3 = u_3,$$

qui donnent pour le dénominateur commun des valeurs de y_1, y_2, y_3, le déterminant

$$C = \pm \begin{vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{vmatrix}$$

Si, au contraire, on déduit x_1, x_2, x_3 du premier système, et qu'on porte dans le second système ces valeurs qui ont déjà le déterminant

$$A = \pm \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

pour dénominateur commun, on aura des équations en y_1, y_2, y_3, d'où l'on tirera pour ces inconnues des valeurs dont le dénominateur sera évidemment le produit de A par le détermi-

Digitized by Google

nant

$$B = \pm \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix}$$

Les dénominateurs de ces valeurs des y obtennes par deux voies différentes doivent être les mêmes, on a donc

$$C = A \,.\, B.$$

Le produit de deux déterminants de même ordre est donc un nouveau déterminant de cet ordre, dans lequel les éléments qui constituent une même ligne sont les sommes des produits des éléments d'une ligne de l'un des facteurs par les éléments des diverses lignes de l'autre facteur.

Il est évident qu'au lieu d'effectuer les multiplications des éléments des déterminants facteurs par lignes, on pourrait procéder par colonnes, ou par lignes et colonnes. Ainsi, par exemple, le produit de deux déterminants binaires pourra s'écrire des quatre manières suivantes :

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta, & a\gamma + b\delta \\ c\alpha + d\beta, & c\gamma + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + c\gamma, & a\beta + c\delta \\ b\alpha + d\gamma, & b\beta + d\delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma, & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma, & c\beta + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + c\beta, & a\gamma + d\delta \\ b\alpha + d\beta, & b\gamma + d\delta \end{vmatrix}$$

Quand on a plus de deux déterminants, on fait le produit des deux premiers, puis on multiplie ce produit par le troisième facteur, etc.... On ne parvient pas au même résultat en prenant les déterminants dans un ordre quelconque. Lorsque les déterminants facteurs sont égaux, le produit se nomme *élévation de puissance;* il est bon de noter que *dans un déterminant carré d'un autre déterminant les éléments conjugués sont identiques entre eux.*

Digitized by Google

EXERCICES.

I. On donne le nom de *combinaisons complètes* à celles dans lesquelles chaque lettre peut être combinée avec elle-même et avec toutes les autres. Démontrer que le nombre des combinaisons complètes de m lettres n à n est égal au nombre des combinaisons sans répétition de $m+n-1$ lettres n à n. — Le nombre des *arrangements complets* de m lettres n à n est m^n.

II. En désignant par P_n le nombre de manières de décomposer un polygone en triangles par des diagonales, on a

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n = P_n + P_{n-1} P_3 + P_{n-2} P_4 + \ldots + P_3 P_{n-1} + P_n.$$

III. On joint deux à deux par des droites n points tels, que trois quelconques d'entre eux ne soient pas en ligne droite. Quel est le nombre des intersections?

$$\frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

IV. Vérifier les identités

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & xyz^2 & xy^2z \\ y & xyz^2 & 0 & x^2yz \\ z & xyz & x^2yz & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

et démontrer que ce déterminant représente seize fois le carré de l'aire du triangle dont x, y, z sont les côtés.

V. Si l'on représente par

$$A_0 x^{m-n} + A_1 x^{m-n-1} + \ldots + A_r x^{m-n-r} + \ldots,$$

le quotient des polynômes

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_r x^{m-r} + \ldots,$$
$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots,$$

on aura

$$A_r = \frac{1}{\alpha_0^{r+1}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \ldots & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_r & \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \alpha_{r-3} & \ldots & a_r \end{vmatrix}$$

Application à la recherche du quotient

$$100\,A_0 + 10\,A_1 + A_2$$

des deux nombres 5312367, 23457.

VI. n individus sont rangés en cercle ; chacun d'eux possède une certaine somme dont il est chargé de remettre une fraction déterminée à son voisin de droite ; chacun reçoit alors une certaine somme de la main gauche et en remet une autre de la main droite. On demande de déterminer les rapports des fortunes primitives pour qu'après l'échange tous les individus soient également riches.

CHAPITRE XIX.

BINOME DE NEWTON.

PRODUIT DE PLUSIEURS BINOMES AYANT LE MÊME PREMIER TERME.

276. Théorème. — *Le produit de m polynômes est la somme de tous les produits de m facteurs qu'on peut former avec un terme du premier polynôme, un terme du second,..., et un terme du dernier.*

La proposition est déjà démontrée pour le cas de deux facteurs (25); il suffit de faire voir que si elle est vraie pour un produit P de n polynômes, elle subsiste pour un produit de $n+1$ polynômes. Or il résulte de l'égalité

$$P(a+b+c+\ldots+k+l)=Pa+Pb+Pc+\ldots+Pk+Pl,$$

et de la composition de P :

1°. Que tous les termes du nouveau produit contiennent $n+1$ facteurs, qui sont un terme du premier polynôme, un terme du second,..., et un terme du dernier;

2°. Que tous ces termes sont distincts, puisque deux quelconques d'entre eux diffèrent, soit par le dernier facteur, soit par le terme de P qui les a fournis;

3°. Que tous les produits de $n+1$ facteurs ont été obtenus; car on a placé successivement chacun des termes du dernier polynôme à la droite de tous les produits de n facteurs qu'on peut former en prenant un terme de chacun des n premiers polynômes.

277. Appliquons ce théorème au produit des m binômes

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l).$$

Ce produit est un polynôme entier du degré m en x; son premier terme est x^m, produit des premiers termes des binômes, et le

dernier est $abc\ldots l$, produit des derniers termes des mêmes binômes.

Le terme en x^{m-n} se compose de tous les produits qu'on obtient en prenant comme facteurs les premiers termes de $m-n$ binômes avec les derniers termes des n binômes restants; le coefficient de x^{m-n} est donc la somme de tous les produits n à n des seconds termes des binômes, et en désignant cette somme par S_n, on a

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)$$
$$= x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots + S_n x^{m-n} + \ldots + abc\ldots l.$$

BINOME DE NEWTON.

278. Lorsqu'on fait $a = b = c = \ldots = l$ dans l'égalité précédente, le premier membre devient

$$(x+a)^m.$$

Dans le second membre, chaque terme de S_1 se réduit à a, et, par suite, S_1 est égal à ma. Chaque terme de S_2 se réduit à a^2; S_2 est donc égal à a^2 répété autant de fois qu'on peut former de produits différents 2 à 2 avec m quantités, c'est-à-dire à

$$\frac{m(m-1)}{2}a^2.$$

En général, S_n est égal à a^n répété autant de fois qu'on peut former de produits n à n avec m quantités, c'est-à-dire à

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}a^n.$$

On a donc enfin

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}a^n x^{m-n} + \ldots + n^m.$$

C'est la formule connue sous le nom de *binôme de Newton*.

Le changement de a en $-a$ n'altère pas les termes de rang im-

pair qui contiennent les puissances paires de a; il donne le signe — aux termes de rang pair; on a donc

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1}$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots.$$

279. *Dans le développement de $(x+a)^m$ les termes équidistants des extrêmes ont des coefficients égaux.*

En effet, le coefficient du terme $a^n x^{m-n}$ qui en a n avant lui est le nombre C_n^m des produits différents de m lettres n à n; celui du terme $a^{m-n}x^n$ qui en a n après lui, c'est-à-dire qui en a $m-n$ avant lui, est le nombre C_{m-n}^m des produits différents de m lettres $m-n$ à $m-n$; or on sait (267) que les deux nombres C_n^m et C_{m-n}^m sont égaux.

On peut dire encore : $(x+a)^m$ étant symétrique par rapport à x et à a, il doit en être de même de son développement; l'existence du terme $ka^n x^{m-n}$ entraîne donc celle du symétrique $ka^{m-n}x^n$; or ces deux termes, qui ont même coefficient, sont équidistants des extrêmes; l'un a n termes avant lui et l'autre n termes après lui.

280. *Pour passer d'un terme au suivant dans le développement de $(x+a)^m$, il faut ajouter 1 à l'exposant de a, diminuer celui de x d'une unité, multiplier l'ancien coefficient par l'ancien exposant de x et diviser par le nouvel exposant de a.*

En effet, le terme de rang $n+1$ a pour expression

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}a^n x^{m-n},$$

d'où, en changeant n en $n-1$,

$$T_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n-2)}{1.2.\ \ .(n-1)}a^{n-1}x^{m-n-1},$$

et en divisant membre à membre,

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{m-n+1}{n}\,\frac{a}{x}.$$

Ce théorème est fort utile dans la pratique, lorsqu'il s'agit de développer une puissance particulière d'un binôme donné.

EXEMPLE :

$$\left(\frac{1}{2}x+2y\right)^7=\frac{x^7}{128}+\frac{7x^6y}{32}+\frac{21x^5y^2}{8}+\frac{35x^4y^3}{2}$$
$$+70x^3y^4+168x^2y^5+224xy^6+128y^7.$$

281. Les coefficients vont en croissant tant qu'on a

$$\frac{m-n+1}{n}>1, \quad \text{ou} \quad n<\frac{m+1}{2}.$$

Lorsque m est pair, le nombre $m+1$ des termes est impair, et il y a au milieu un coefficient plus grand que tous les autres. Quand m est pair, il y a au milieu deux coefficients égaux entre eux et supérieurs à tous les autres. Aussi, pour avoir le plus grand nombre de produits différents de 12 objets, il faut les combiner 6 à 6; si l'on donnait 11 objets, il faudrait les combiner 5 à 5, ou 6 à 6.

TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL.

282. Un peu avant Newton, Pascal avait donné, dans la construction de son triangle, l'équivalent de la formule du binôme, mais sans l'écrire en algèbre.

On nomme *triangle arithmétique* le tableau suivant dont la première ligne horizontale renferme les coefficients de $(x+a)^1$, la deuxième celle de $(x+a)^2, \ldots$, la $m^{ième}$ ceux de $(x+a)^m$:

1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
.	.....								
1	C_1^m	C_2^m	C_3^m	C_4^m ...	.....	.....			

En faisant abstraction de la colonne des unités (dont nous ne tiendrons désormais aucun compte), on voit que le nombre situé à l'intersection de la $m^{ième}$ ligne et de la $n^{ième}$ colonne est C_n^m. L'identité

$$C_n^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1},$$

qu'il est aisé de vérifier, montre que *chaque terme du triangle arithmétique est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre placé à gauche de ce dernier*. Cette propriété sert à former le triangle; ainsi, pour déduire la cinquième ligne de la quatrième, on dit :

$$1 + 0 = 1, \quad 4 + 1 = 5, \quad 6 + 4 = 10, \text{ etc.}$$

Les termes de la première colonne (toujours abstraction faite de celle des unités) sont dits *nombres figurés du premier ordre*, ceux de la deuxième, *nombres figurés du second ordre*, . . ., ceux de la $n^{ième}$, *nombres figurés du $n^{ième}$ ordre*. La propriété précédente s'énonce alors : *le $p^{ième}$ nombre figuré de l'ordre $q+1$ est la somme du $(p-1)^{ième}$ figuré du même ordre et du $p^{ième}$ figuré de l'ordre q*; ce qu'on peut écrire

$$F_p^{q+1} = F_{p-1}^{q+1} + F_p^q.$$

En changeant successivement p en $p-1$, $p-2$, . . ., on a

$$F_{p-1}^{q+1} = F_{p-2}^{q+1} + F_{p-1}^q, \quad F_{p-2}^{q+1} = F_{p-3}^{q+1} + F_{p-2}^q, \ldots,$$

$$F_2^{q+1} = F_1^{q+1} + F_2^q.$$

En ajoutant, et remplaçant F_1^{q+1} par F_1^q, puisque tous les premiers nombres figurés d'un ordre quelconque sont égaux à l'unité et par suite égaux entre eux, on trouve la relation

$$F_p^{q+1} = F_p^q + F_{p-1}^q + F_{p-2}^q + \ldots + F_2^q + F_1^q,$$

qui exprime que *la somme des p premiers nombres figurés de l'ordre q est égale au $p^{ième}$ nombre figuré de l'ordre $q+1$*. Par

exemple, on a

$$70 = 35 + 20 + 10 + 4 + 1.$$

Le $p^{ième}$ nombre figuré de l'ordre $q+1$ est à l'intersection de la $(q+1)^{ième}$ colonne et de la $(p+q)^{ième}$ ligne; il a donc pour valeur

$$C_{q+1}^{p+q} = \frac{p(p+1)\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots p}.$$

283. *Somme des p premiers nombres de la suite naturelle.* — C'est le $p^{ième}$ figuré de l'ordre 2, $\frac{p(p+1)}{2}$; ce nombre étant celui des boulets de la $p^{ième}$ tranche d'une pile triangulaire, on voit qu'une pile de n tranches contient un nombre de boulets égal à la somme des n premiers nombres figurés du deuxième ordre, c'est-à-dire au $n^{ième}$ figuré du troisième ordre $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$. Aussi donne-t-on souvent aux figurés du troisième ordre le nom de *nombres pyramidaux triangulaires.*

Somme des carrés des p premiers nombres. — L'identité

$$k^2 = k + (k-1)k = k + 2\frac{(k-1)k}{1.2},$$

montre que k^2 est égal à k plus deux fois le $(k-1)^{ième}$ figuré du second ordre. La quantité $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2$ s'obtiendra donc en ajoutant à la somme des p premiers nombres naturels le double de la somme des $(p-1)^{ièmes}$ figurés de l'ordre 2, c'est-à-dire le double du $(p-1)^{ième}$ figuré de l'ordre 3; on trouve ainsi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2$$
$$= \frac{p(p+1)}{1.2} + 2\frac{(p-1)p(p+2)}{1.2.3} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Somme des cubes des p premiers nombres. — L'identité

$$k^3 = k + k(k^2-1) = k + 6\frac{(k-1)k(k+1)}{1.2.3},$$

montre que k^3 est égal à k plus six fois le $(k-1)^{ième}$ figuré du troisième ordre. La quantité $1^3 + 2^3 + \ldots + p^3$ s'obtiendra donc en ajoutant à la somme des p premiers nombres, six fois le $(p-1)^{ième}$

figuré de l'ordre 4 ; on trouve ainsi

$$1^3 + 2^3 + \ldots + p^3$$
$$= \frac{p(p+1)}{1.2} + 6\,\frac{(p-1)\,p\,(p+1)\,(p+2)}{1.2.3.4} = \left[\frac{p(p+1)}{1.2}\right]^2.$$

DÉVELOPPEMENT DE $(a \pm b\sqrt{-1})^m$.

284. Si dans la formule

$$(a+b)^m = a^m + mba^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,b^2 a^{m-2} + \ldots,$$

on remplace b par $b\sqrt{-1}$, les termes dans lesquels l'exposant de b est pair gardent la même valeur absolue et deviennent alternativement positifs et négatifs ; ceux qui contiennent les puissances impaires de b sont multipliés alternativement par $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$; on a donc

$$(a + b\sqrt{-1})^m = a^m - \frac{m(m-1)}{1.2}\,a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,a^{m-4}b^4 - \ldots$$
$$+ \sqrt{-1}\left[ma^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,a^{m-3}b^3 + \ldots\right] = \mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1},$$

et en changeant b en $-b$,

$$(a - b\sqrt{-1})^m = a^m - \frac{m(m-1)}{1.2}\,a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,a^{m-4}b^4 - \ldots$$
$$- \sqrt{-1}\left[ma^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,a^{m-3}b^3 + \ldots\right] = \mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1}.$$

PUISSANCES DES POLYNOMES

285. Le théorème du n° **276** montre que le dévelopement de

$$(a + b + c + \ldots + l)^m$$

est une suite de termes de la forme

$$ka^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda},$$

dans lesquels les exposants α, β, γ, ..., λ ont toujours une somme égale à m, et où le coefficient k est le nombre de permutations

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma \times \ldots \times 1.2\ldots\lambda},$$

que l'on peut faire avec les lettres a, b, c, ..., l, en prenant α fois la première, β fois la seconde, ..., λ fois la dernière.

Le terme général de $(a + b + c + \ldots + l)^m$ est donc

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times 1.2\ldots\lambda} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda},$$

avec la condition

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = m,$$

et l'on écrit d'une manière symbolique

$$(a + b + c + \ldots + l)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots l^{\lambda}.$$

Dans l'application de cette formule, les produits

$$\alpha!, \quad \beta!, \ldots, \quad \lambda!$$

doivent être remplacés par l'unité lorsqu'on fait

$$\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \beta = 0, \ldots, \quad \text{ou} \quad \lambda = 0.$$

EXTRACTION DES RACINES DES POLYNOMES.

286. Soit proposé d'extraire la racine $n^{ième}$ du polynôme

$$P = Ax^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_n x^{p-n} + \ldots + A_p.$$

Représentons cette racine par

$$R = Bx^r + B_1 x^{r-1} + \ldots + B_n x^{r-n} + \ldots + B_r;$$

on devra avoir identiquement

$$(1)\quad \begin{cases} A x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_n x^{p-n} + \ldots + A_p \\ = (B x^r + B_1 x^{r-1} + \ldots + B_n x^{r-n} + \ldots + B_r)^m. \end{cases}$$

Ce qui exige d'abord que les deux membres soient de même degré, puis que les mêmes puissances de x aient les mêmes coefficients.

La première condition

$$p = mr$$

démontre que le problème proposé est impossible, si $\frac{p}{m}$ n'est pas entier. Supposons cette condition remplie, le nombre entier auquel se réduit $\frac{p}{m}$ exprime le degré r de la racine dont il faut déterminer les $r+1$ coefficients. A cet effet, on élève le polynôme R à la puissance m, ce qui donne un nouveau polynôme de degré $mr = p$, et l'on exprime que les coefficients de ce nouveau polynôme sont égaux à ceux qui leur correspondent dans le polynôme proposé P; on obtient ainsi $p+1$ équations, dont les $r+1$ premières servent à déterminer successivement $B, B_1, \ldots, B_r$; les suivantes sont des équations de condition auxquelles devront satisfaire les valeurs trouvées de $B, B_1, B_2, \ldots, B_r$ pour que le problème soit possible.

Examinons la forme des $p+1$ équations qui lient les coefficients du polynôme proposé à ceux de la racine. On voit aisément que de tous les termes du développement

$$(B x^r + B_1 x^{r-1} + \ldots + B_n x^{r-n} + \ldots + B_r)^m$$

qui contiennent B_n, celui qui a le plus fort degré en x est

$$m (B x^r)^{m-1} B_n x^{r-n} = m B_n B^{m-1} x^{mr-n}.$$

D'ailleurs c'est le seul terme de degré $mr - n$ qui renferme B_n. Il résulte de là :

1°. *Que l'inconnue* B_n *ne se trouve dans aucune des n premières équations;*

2° *Qu'elle ne figure qu'au premier degré dans la* $(n+1)^{ième}$.

Ainsi, la première équation ne contient que l'inconnue B; la seconde donne B_1 par une équation du premier degré, après qu'on a remplacé B par sa valeur; B et B_1 étant connus, la troisième donne B_2, qui n'y figure qu'au premier degré, et ainsi de suite. Rien n'est donc plus facile que le calcul des coefficients de la racine.

Exemple. — Cherchons, par ce procédé, la racine cubique du polynôme

$$8x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27.$$

Pour que ce polynôme puisse revêtir la forme

$$(ax^2 + bx + c)^3 = a^3x^6 + 3a^2bx^5 + 3ab^2\left|\begin{matrix} x^4 + b^3 \\ +3a^2c \end{matrix}\right| \begin{matrix} x^4 + b^3 \\ +6abc \end{matrix}\left|\begin{matrix} x^3 + 3ac^2 \\ +3b^2c \end{matrix}\right| x^2 + 3bc^2x + c^3$$

il faut qu'on ait

$$(1)\quad \begin{cases} 8 = a^3, \\ 12 = 3a^2b, \\ -30 = 3(ab^2 + a^2c); \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} -35 = b^3 + 6abc, \\ 45 = 3(ac^2 + b^2c), \\ 27 = 3bc^2, \\ -27 = c^3. \end{cases}$$

Les relations (1) donnent successivement les valeurs

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -3,$$

qui rendent les relations (2) identiques. La racine est donc

$$2x^2 + x - 3.$$

On utilise souvent les équations de condition pour fixer la valeur de certains coefficients indéterminés du polynôme primitif.

EXERCICES

I. Dans le développement de $(x+a)^m$, la somme des coefficients de rang pair est égale à celle des coefficients de rang impair, et la somme de tous les coefficients vaut 2^m.

II. Trouver la somme des valeurs que prend la fonction

$$x(x-1)(2x+1)$$

quand la variable x devient successivement $1, 2, \ldots, n$.

III. Assigner une valeur de x qui vérifie l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{x}\right)>1=\alpha,$$

où p est un entier donné et α une quantité positive très-petite.

IV. Trouver la somme des carrés des coefficients du binôme.

V. En désignant par A_p^n le nombre des arrangements de n lettres p à p, démontrer qu'on a

$$n^p = A_p^n + B_p A_{p-1}^n + C_p A_{p-2}^n + \ldots + L_p A_2^n + n,$$

où les coefficients $B_p, C_p, \ldots, L_p$ se déduisent des relations

$$\begin{aligned}
B_p &= B_{p-1} + p - 1,\\
C_p &= C_{p-1} + (p-2)B_{p-1},\\
D_p &= D_{p-1} + (p-3)C_{p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
L_p &= 1 + 2K_{p-1}.
\end{aligned}$$

Conclure de là la relation

$$\begin{aligned}
S_p = \frac{1}{p+1}A_{p+1}^{n+1} + \frac{B_p}{p}A_p^{n+1} + \frac{C_p}{p-1}A_{p-1}^{n+1} + \ldots\\
+ \frac{L_p}{3}A_3^{n+1} + \frac{1}{2}A_2^{n+1},
\end{aligned}$$

dans laquelle S_p désigne la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers.

Applications : $1^6 + 2^6 + \ldots + 10^6 = 1978405$.

VI. x, a, b étant des quantités quelconques et m un nombre entier et positif, on a

$$(x+a)^m = x^m + ma(x+b)^{m-1}$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{m-2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}a(a-nb)^{n-1}(x+nb)^{m-n}+\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ma[a-(m-1)b]^{m-2}[x+(m-1)b]+a(a-mb)^{m-1}.$$

VII. Démontrer qu'en désignant par x et y deux quantités quelconques, et par n un nombre entier positif, on a identiquement

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1.2.3\ldots n}=\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$
$$+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.\frac{y}{1}+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)}.\frac{y(y-1)}{1.2}$$
$$+\ldots+\frac{x}{1}.\frac{y(y-1)\ldots(y-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

CHAPITRE XX.

LOGARITHMES CONSIDÉRÉS COMME EXPOSANTS.

VARIATIONS DE a^x.

287. La nouvelle théorie des logarithmes est fondée sur les propriétés de la fonction a^x, où a désigne un nombre positif quelconque.

Lemme I. — *Toutes les puissances commensurables d'un nombre positif sont positives.* Cela résulte de ce que l'on ne considère que les valeurs positives des radicaux (**139**).

Lemme II. — *Toutes les puissances positives d'un nombre positif sont plus grandes ou plus petites que l'unité, suivant que ce nombre est lui-même supérieur ou inférieur à* 1. *Le contraire a lieu pour les puissances négatives.*

En effet, soit a un nombre plus grand que 1, et $a^{\frac{m}{n}}$ une puissance positive de ce nombre; on a

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}:$$

or, puisque a est supérieur à 1, il en est de même de la puissance entière a^m, et par suite de $\sqrt[n]{a^m}$. Si a est moindre que 1, on peut toujours le représenter par $\frac{1}{a'}$, a' étant un nombre supérieur à 1, et la relation $a^x = \frac{1}{a'^x}$ montre que a^x est plus petit que 1, puisque a'^x est plus grand que l'unité.

La dernière partie de l'énoncé résulte de ce que les puissances négatives a^{-x} d'un nombre sont les inverses $\frac{1}{a^x}$ de ses puissances positives.

Digitized by Google

288. Théorème I. — *Lorsque la variable x reçoit des valeurs commensurables croissantes, la fonction a^x varie toujours dans le même sens; elle augmente ou diminue, suivant que a est plus grand ou moindre que l'unité.*

En effet, soient x_0 et $x_0 + h$ deux valeurs commensurables successivement attribuées à x; le signe de x_0 est arbitraire, mais h est positif; il résulte du lemme précédent, que le quotient $\frac{a^{x_0+h}}{a^{x_0}} = a^h$ est plus grand ou plus petit que 1, suivant que a est lui-même plus grand ou moindre que l'unité.

289. Théorème II. — *La fonction a^x varie d'une manière continue, quand x croît d'une manière continue;* en d'autres termes, *on peut donner à la variable x un accroissement h assez petit, pour que la fonction a^x éprouve une variation moindre que toute quantité donnée ε.*

Supposons d'abord $a > 1$, et soit x_0 une valeur commensurable quelconque de x; on a

$$a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1).$$

Désignons par $\frac{1}{n}$ une fraction à dénominateur entier plus grande que h; le théorème sera démontré, si l'on fait voir qu'on peut toujours prendre n assez grand pour que l'inégalité

$$a^{x_0}\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon \quad \text{ou son équivalente} \quad a < \left(1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right)^n$$

soit satisfaite; or on sait que les puissances entières d'un nombre plus grand que 1 peuvent dépasser toute limite (**209**).

Si a est moindre que 1, on peut toujours le représenter par $\frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité, et dès lors l'égalité $a^x = \frac{1}{a'^x}$ montre que lorsque a'^x varie d'une manière continue, il en est de même de a^x.

290. Corollaire. — *Lorsque x croît d'une manière continue*

de $-\infty$ *à* $+\infty$, *la fonction* a^x *passe par toutes les valeurs positives, et ne prend qu'une fois chacune d'elles.*

Il y a deux cas à distinguer :

1°. Supposons a supérieur à l'unité, $+a^x$, nul pour $x=0$, devient infiniment grand pour $x=\infty$ (209); donc, en vertu de la *continuité*, lorsque x croît de 0 à $1+\infty$, la fonction a^x passe par tous les nombres compris entre 1 et $+\infty$. Donnons maintenant à x des valeurs négatives, et posons, à cet effet,

$$x=-x',$$

on aura

$$a^x=\frac{1}{a^{x'}};$$

quand x' croît de 0 à $+\infty$, $a^{x'}$ croît d'une manière continue de 1 à $+\infty$, en sorte que a^x décroît de 1 à 0. Ainsi, en résumé, lorsque x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x passe par tous les nombres compris entre 0 et $+\infty$; d'ailleurs, comme elle va constamment en augmentant, elle n'acquiert qu'une fois chacune des valeurs positives.

2°. Si a est moindre que l'unité, on pose

$$a=\frac{1}{a'},$$

a' étant supérieur à 1, et la relation

$$a^x=\frac{1}{a'^x}$$

montre que lorsque x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a'^x varie de 0 à $+\infty$, en sorte que a^x passe successivement par toutes les valeurs positives, et une seule fois par chacune d'elles.

DÉFINITION DE a^x, LORSQUE x EST INCOMMENSURABLE.

291. Les considérations précédentes permettent de définir a^x lorsque x est incommensurable. Prenons, pour fixer les idées, $a^{\sqrt{7}}$, et rappelons, en peu de mots, la définition de $\sqrt{7}$.

L'arithmétique donne le moyen d'obtenir le plus grand nombre de dixièmes, de centièmes, etc., dont le carré soit contenu dans un nombre entier donné. On trouve ainsi, par des procédés connus (*), que le nombre 7 est supérieur aux carrés des nombres

(1) 2 2,6 2,64 2,645 2,6457...

et inférieur aux carrés des nombres

(2) 3 2,7 2,65 2,946 2,6458....

La différence entre l'un des nombres de la suite (1) et le correspondant de la suite (2) peut devenir moindre que toute quantité assignable, et il en est de même de la différence des carrés de ces nombres. Les carrés des nombres (1) et ceux des nombres (2) s'approchent donc indéfiniment du nombre 7 qui est, pour ces deux suites de carrés, une limite commune. Les suites (1) et (2) ont elles-mêmes une limite commune, et cette limite est ce que l'on nomme la *racine carrée de* 7. Les nombres qui forment les suites (1) et (2) sont les valeurs de $\sqrt{7}$, à une unité près, à un dixième près, etc., par défaut ou par excès.

Actuellement, si dans a^x on remplace x par les valeurs approchées de $\sqrt{7}$, on obtiendra deux séries de nombres qui se rapprocheront de plus en plus, et qui auront une limite commune; car deux quelconques d'entre eux, correspondant à deux valeurs de $\sqrt{7}$ approchées par défaut et par excès à moins de $\frac{1}{10^n}$, différeront d'aussi peu qu'on voudra (**289**), puisque la différence $\frac{1}{10^n}$ de leurs exposants diminuera à volonté à mesure qu'on fera croître n. Cette limite commune est précisément la valeur de $a^{\sqrt{7}}$.

On peut montrer très-clairement que cette définition assigne à $a^{\sqrt{7}}$ une valeur *unique et déterminée*. Supposons, en effet, qu'on porte sur une même droite, à partir d'une origine fixe,

(*) SERRET, *Éléments d'Arithmétique*, chap. XIII.

des longueurs égales aux valeurs de a^x; les segments correspondants au cas où x est remplacée par les valeurs par défaut de $\sqrt{7}$ auront leurs extrémités dans une certaine région, et les segments correspondants au cas où x est remplacée par les valeurs par excès de $\sqrt{7}$ se termineront dans une autre région. Le théorème I montre que ces deux régions sont entièrement *séparées*, et le théorème II, que l'intervalle qui les sépare n'a pas une étendue finie. Il ne peut donc exister entre ces régions qu'un simple *point* de démarcation, et c'est la distance de ce point à l'origine qui est mesurée par $a^{\sqrt{7}}$.

NOUVELLE DÉFINITION DES LOGARITHMES.

292. Lorsqu'on a la relation $a^x = y$ dans laquelle a est un nombre positif, on dit que x est le logarithme du nombre y dans la base a. A chaque valeur de la base a répond un *système de logarithmes*.

Cette définition assigne un logarithme et un seul à tout nombre positif, car on sait que, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, a^x passe par toutes les valeurs positives, et ne passe qu'une fois par chacune d'elles.

Dans tout système, le logarithme de l'unité est zéro, et celui de la base est 1; car

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

Lorsque la base est plus grande que l'unité, les nombres plus grands que 1 ont des logarithmes positifs, les nombres plus petits que 1 ont des logarithmes négatifs. Le contraire a lieu lorsque la base est moindre que l'unité (**287**).

Enfin, les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes.

PROPRIÉTÉS DES LOGARITHMES.

293. *Le logarithme du produit de plusieurs nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.*

Soient, en effet, x, x', x'',... les logarithmes des nombres

$y, y', y'', \ldots$; on a

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y', \quad a^{x''} = y'', \ldots,$$

d'où, en multipliant,

$$a^{x+x'+''+\cdots} = y y' y'' \ldots;$$

la somme $x + x' + x'' + \ldots$ est donc bien le logarithme du produit $y y' y'' \ldots$.

Le logarithme du quotient de deux nombres est égal à la différence des logarithmes de ces nombres.

Soient, en effet, x et x' les logarithmes des nombres y et y'; on a

$$a^x = y, \quad a^{x'} = y',$$

d'où, en divisant,

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'};$$

donc $x - x'$ est le logarithme de $\frac{y}{y'}$.

Le logarithme de la puissance $n^{ième}$ d'un nombre est égal, quel que soit n (entier ou fractionnaire, positif ou négatif), au produit de n par le logarithme de ce nombre.

En effet, en élevant à la puissance n les deux membres de l'équation

$$a^x = y,$$

qui exprime que x est le logarithme de y, on trouve la relation

$$a^{nx} = y^n,$$

qui montre que nx est le logarithme de y^n.

Il résulte de là que, *si des nombres $a, aq, aq^2, \ldots$ sont en progression géométrique, leurs logarithmes*

$$\log a, \quad \log a + \log q, \quad \log a + 2 \log q, \ldots$$

forment une progression arithmétique; c'est la propriété que nous avons prise pour point de départ dans le chapitre XVI.

CHANGEMENT DE SYSTÈME.

294. Soient x et x' les logarithmes d'un même nombre y dans les deux systèmes ayant a et a' pour bases; on a

$$a^x = y = a'^{x'},$$

et, en prenant les logarithmes des deux membres dans la base a,

$$x = x' \log_a a', \quad x' = \frac{x}{\log_a a'}.$$

On retrouve ainsi la règle du n° **228**; *pour changer de système, il faut diviser les anciens logarithmes par le logarithme de la nouvelle base pris dans l'ancien système.*

Ce théorème, appliqué en particulier à la base a, donne la relation remarquable

$$\log_{a'} a . \log_a a' = 1.$$

RÉCIPROQUE DE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES LOGARITHMES.

295. Log x est la seule fonction de x qui jouisse de la propriété exprimée par la relation

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

En effet, en remplaçant successivement dans cette égalité y par x, x^2, x^3, ..., on trouve

$$f(x^2) = 2f(x),$$
$$f(x^3) = f(x) + f(x^2) = 3f(x),$$
$$f(x^4) = f(x) + f(x^3) = 4f(x),$$

et, en général, m étant un nombre entier positif,

$$f(x^m) = mf(x).$$

x étant un nombre positif quelconque, on peut toujours poser (**229**)

$$x = e^z, \quad \text{d'où} \quad z = l.x;$$

il vient alors

$$f(e^{zm}) = mf(e^z).$$

Le premier membre est systématique par rapport à m et à z; le second ne doit donc pas être altéré par la permutation de ces deux lettres, et l'on a

$$mf(e^z) = zf(e^m),$$

d'où

$$f(e^z) = \frac{f(e^m)}{m} z,$$

$$f(x) = k.l.x = \log x,$$

dans une base quelconque.

EXERCICES.

I. Trouver la fonction $f(x)$, qui est définie par l'une des relations suivantes :

$$f(x) + f(y) = f(x + y),$$
$$f(x).f(y) = f(x + y),$$
$$f(x).f(y) = f(xy).$$

II. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x^p = y^q, \\ x^q = y^p; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+1)^x = 100, \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}. \end{cases}$$

III. Résoudre les équations

$$\left(\frac{295}{867}\right)^{3-x} = 632 \left(\frac{56}{99}\right)^{\frac{5x}{9}},$$

$$3^{2x}.4^{6x-7} = 9^{x-2}.7^{1-x}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE XXI.

CALCULS NUMÉRIQUES.

MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES PAR SUBSTITUTION.

296. Soit une équation de la forme

$$x = f(x);$$

si x_1 est une valeur approchée de x, on aura, à peu près,

$$x = f(x_1).$$

Désignant cette valeur par x_2 et substituant de nouveau, on obtient une troisième valeur

$$f(x_2) = x_3$$

qui en fournit une quatrième

$$f(x_3) = x_4,$$

et ainsi de suite. Les nombres

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \ldots$$

ainsi trouvés forment une série qui parfois converge très-vite vers la valeur exacte de x.

297. Pour voir si la méthode est applicable, désignons par $x_1 + h$ la vraie valeur de la racine, on aura

$$x_1 + h = f(x_1 + h),$$

et l'erreur $x - x_2$ de la valeur suivante $x_2 = f(x_1)$ aura pour expression

$$f(x_1 + h) - f(x_1),$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à h,

$$Ah + Bh^2 + \ldots.$$

Digitized by Google

Cette erreur est donc à fort peu près égale à Ah, et pour que x_2 soit plus voisin de x que x_1, c'est-à-dire pour que la méthode réussisse, il faut que A soit moindre que l'unité.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $ax^2 + bx + c = 0$ LORSQUE a EST TRÈS-PETIT PAR RAPPORT A b ET A c.

298. Lorsque a est très-petit par rapport à b et à c, le radical $\sqrt{b^2 - 4ac}$ diffère très-peu de zéro, et pour avoir une valeur approchée de la racine

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

il faudrait pousser très-loin l'extraction de la racine carrée de $b^2 - 4ac$. D'ailleurs le facteur $\frac{1}{2a}$ étant très-grand, à une petite erreur commise sur le numérateur répond une erreur notable sur x. Aussi dans ce cas, pour résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

a-t-on recours à la méthode des approximations successives. On ne s'occupe d'ailleurs que de la racine qui tend vers $-\frac{c}{b}$; on obtient ensuite l'autre, qui est très-grande, en retranchant la première de $-\frac{b}{a}$.

299. Avant de commencer, faisons une remarque importante. Soient

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \ldots, \quad \alpha^n, \ldots$$

les puissances successives d'une fraction, et

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \ldots, \quad k_n, \ldots$$

des nombres qui ne soient pas très-grands, ou plutôt tels, que les fractions

$$\frac{1}{k_1}, \quad \frac{1}{k_2}, \quad \frac{1}{k_3}, \ldots, \quad \frac{1}{k_n}, \ldots$$

ne soient pas comparables pour leur petitesse à α. La suite

$$k_1\alpha, \quad k_2\alpha^2, \quad k_3\alpha^3, \ldots, \quad k_n\alpha^n, \ldots$$

sera composée de termes tels, que, dans un calcul d'approximation, on pourra négliger l'un quelconque d'entre eux vis-à-vis de celui qui le précède.

On dit alors que les quantités α et $k_1\alpha$ sont du *premier ordre*, et que

$$k_2\alpha^2, \quad k_3\alpha^3, \ldots, \quad k_n\alpha^n, \ldots$$

sont des quantités très-petites du *second*, du *troisième*, ..., du *$n^{ième}$ ordre*.

300. Cela posé, revenons à l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

et posons

$$x = -\frac{c}{b}y, \quad \frac{ac}{b^2} = \alpha;$$

nous aurons

$$\alpha y^2 - y + 1 = 0$$

ou

$$(1) \qquad y = 1 + \alpha y^2.$$

Si α est très-petit, on peut négliger αy^2 et écrire comme première approximation

$$y_0 = 1.$$

Cette valeur comportant une erreur du premier ordre, en la substituant dans le second membre de l'équation (1), on commettra sur y une erreur du premier ordre, sur y^2 une erreur du même ordre, et, par suite, sur $1 + \alpha y^2$, à cause du facteur α, une erreur du deuxième ordre; on aura donc, aux quantités du second ordre près, la deuxième valeur approchée

$$y_1 = 1 + \alpha.$$

La substitution de y_1 dans l'équation (1) entraînera sur y une erreur du deuxième ordre, sur y^2 une erreur du même ordre, et, par suite, sur $1 + \alpha y^2$ une erreur du troisième ordre; il faudra

donc, dans le développement

$$1 + \alpha(1 + \alpha)^2 = 1 + \alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3,$$

supprimer le terme α^3, qui est de l'ordre des quantités déjà négligées, et prendre pour troisième valeur

$$y^2 = 1 + \alpha + 2\alpha^2,$$

qui est approchée aux quantités du troisième ordre près.

En continuant de même, on trouverait

$$y_3 = 1 + \alpha + 2\alpha^2 + 5\alpha^3,$$
$$y_4 = 1 + \alpha + 2\alpha^2 + 5\alpha^3 + 14\alpha^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La loi des coefficients est la suivante :

Le coefficient de α^{2n} est la somme des doubles produits des coefficients de α^0 et α^{2n-1}, de α^1 et α^{2n-2}, ..., de α^{n-1} et de α^n. Le coefficient d'une puissance impaire de α, telle que α^{2n+1}, est la somme des doubles produits de α^0 et α^{2n}, de α^1 et α^{2n-1}, ..., de α^{n-1} et α^{n+1}, plus le carré du coefficient de α^n. Ainsi l'on a, pour le coefficient de α^3,

$$2(1.2) + 1^2 = 5,$$

et pour celui de α^4

$$2(1.5 + 1.2) = 14.$$

Le lecteur démontrera aisément la généralité de cette loi.

301. Les formules

$$x_0 = -\frac{c}{b},$$

$$x_1 = -\frac{c}{b}(1 + \alpha),$$

$$x_2 = -\frac{c}{b}(1 + \alpha + 2\alpha^2),$$

$$x_3 = -\frac{c}{b}(1 + \alpha + 2\alpha^2 + 5\alpha^3),$$

$$x_4 = -\frac{c}{b}(1 + \alpha + 2\alpha^2 + 5\alpha^3 + 14\alpha^4),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

satisfont aux conditions qui constituent un bon calcul par approximations successives : 1° chacune s'obtient de la précédente par l'addition d'un terme de correction ; 2° l'erreur commise est toujours d'un ordre supérieur à celui du dernier terme employé. Il suit de là que pour savoir à chaque instant si la valeur que l'on a est approchée par défaut ou par excès, il suffit, en général, d'examiner le signe du terme qui suit le dernier calculé.

Exemple. — Soit l'équation

$$0,000015\,x^2 + 100\,x - 3 = 0\,;$$

on a

$$a = \frac{15}{10^6}, \quad b = 10^2, \quad c = -3,$$

$$\begin{array}{lll}
-\dfrac{c}{b} & = \dfrac{3}{10^2} & = +\,0,03000\,00000\,00000\,00000\,00000\ldots \\
-\dfrac{ac^2}{b^3} & = -\dfrac{15.9}{10^{12}} & = -\ldots\ldots\ldots\ldots 135000\,00000\,00000\ldots \\
-\dfrac{2\,a^2c^3}{b^5} & = \dfrac{2.15^2.27}{10^{22}} & = +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 121\,50000\ldots \\
-\dfrac{5\,a^3c^4}{b^7} & = \ldots\ldots\ldots & = -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

$$x' = +\,0,02999\,99998\,65000\,00121$$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{10^8}{5} = -\,6666666,66666\,66666\,66666\,66666\,66\ldots$$

$$x'' = -\frac{a}{b} - x' = -\,6666666,69666\,66665\,31666\,66788.$$

Ces valeurs sont exactes à 20 décimales.

302. L'équation du problème du puits est une de celles qu'on doit traiter par la méthode précédente ; car a est alors représenté par $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(340)^2} < \frac{1}{10^3}$.

En se bornant à la première approximation, on trouve

$$x = \frac{t^2}{\frac{2}{g} + \frac{2t}{v}} = \frac{gt^2}{2} \frac{1}{1 + \frac{gt}{v}},$$

d'ailleurs

$$\frac{1}{1 + \frac{gt}{v}} = 1 - \frac{gt}{v} + \frac{g^2 t^2}{v^2} + \ldots,$$

en sorte que, si l'on néglige les termes de l'ordre $\frac{1}{v^2}$, on peut remplacer $\frac{1}{1 + \frac{gt}{v}}$ par $1 - \frac{gt}{v}$, et la formule devient

$$x = \frac{gt^2}{2}\left(1 - \frac{gt}{v}\right) = \frac{gt^2}{2} - \frac{g^2 t^3}{2v}.$$

APPLICATION A UN CALCUL D'INTÉRÊT.

303. On sait que la somme x, produite par un capital a placé à intérêts composés au denier r pendant n années plus p jours, est donnée par la formule

$$x = a(1 + r)^n \left(1 + \frac{p}{360} r\right).$$

L'année est censée se composer de 12 mois ayant chacun 30 jours. On déduit de là

$$(1) \qquad \log(1 + r) = \frac{1}{n}(\log x - \log a) - \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{pr}{360}\right).$$

Le facteur $1 + \frac{pr}{360}$ diffère peu de l'unité, en sorte que son logarithme est près de zéro, et la deuxième partie du second membre est négligeable. Si donc l'inconnue de la question est r, on prendra pour première approximation la valeur r_1 qui résulte de l'équation incomplète

$$\log(1 + r) = \frac{1}{n}(\log x - \log a);$$

r_1 étant approché par excès, sa substitution dans (1) donnera une seconde valeur r_2, approchée par défaut, laquelle fournira à son tour une valeur par excès r_3, en sorte que le calcul se fait dans les meilleures conditions; les nombres obtenus forment deux séries convergentes dont la vraie valeur de r est la limite commune.

Soit, par exemple, *à chercher le taux auquel il faut placer* $5073^f,21^c$ *pour avoir, dans* 41 *ans* 5 *mois* 12 *jours, une somme égale à* $29575^f\ 15^c$.

La formule est

$$\log(1+r)=\frac{1}{41}(\log 29575-\log 5073,21)-\frac{1}{41}\log\left(1+\frac{162}{360}r\right)$$

ou

$$\log(1+r)=0,0186742-\frac{1}{41}\log\left(1+\frac{9}{20}r\right).$$

Première valeur par excès, r_1 :

$$\log(1+r_1)=0,0186742,\quad 1+r_1=1,043936,\quad r_1=0,043936.$$

Deuxième valeur par défaut, r_2 :

$$\log(1+r_2)=0,0186742-\frac{1}{41}\log\left(1+\frac{9.0,043936}{20}\right)$$
$$=0,0184689,$$
$$1+r_2=1,043444,\quad r_2=0,043444.$$

Troisième valeur par excès, r_3 :

$$\log(1+r_3)=0,0186742-\frac{1}{41}\log\left(1+\frac{9.0,043936}{20}\right)$$
$$=0,0184689\,8,$$
$$1+r_3=1,043445,\quad r_3=0,043445.$$

Le denier cherché r est donc compris entre 0,043444 et 0,043445; on prend

$$r=0,04344,$$

c'est l'intérêt de 1 franc; pour avoir l'intérêt de 100 francs, c'est-

à-dire le taux, on multiplie par 100, ce qui donne

$$4,344 \text{ pour } 100.$$

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE QUATRE ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

504. Lorsqu'on a à résoudre un système d'équations du premier degré à grands coefficients, on opère par substitution, et, pour diminuer les erreurs le plus possible, on commence par prendre la valeur de l'inconnue qui a le plus fort coefficient.

Voici un exemple de ce genre de calcul.

Soit le système

$$\begin{aligned}
&(1)\quad 198,23571\,x - 2,501672\,y - 22,21482\,z + 0,0416723\,u = 29,56134,\\
&(2)\quad 24,30612\,x + 0,3816749\,y - 4,006138\,z - 59,32164\,u = 567,4132,\\
&(3)\quad 43,56712\,x - 6,080936\,y + 52,00458\,z - 6,200349\,u = 26,71432,\\
&(4)\quad 88,96672\,x + 37,42016\,y + 67,41692\,z - 3,403915\,u = 77,4236.
\end{aligned}$$

En remplaçant, dans (2), (3), (4), x par sa valeur tirée de (1), on obtient le nouveau système

$$\begin{aligned}
&(5)\quad x = 0,1491221 + 0,01261967\,y + 0,1120626\,z - 0,000210215\,u,\\
&(6)\quad 0,688409\,y - 1,282338\,z - 59,32674\,u = 563,7886,\\
&(7)\quad -5,531133\,y + 56,88982\,z - 6,209507\,u = 20,21750,\\
&(8)\quad 38,54289\,y + 77,38676\,z - 3,422617\,u = 64,1567.
\end{aligned}$$

Tous les coefficients ont été calculés par logarithmes; voici, par exemple, le calcul du coefficient de y dans l'équation (1):

$$\begin{aligned}
\log 2,501672 &= 0,3982304 +\\
\log 198,23571 &= 2,2971821 -\\
\hline
&\quad \bar{2},1010483 \quad \ldots\ 0,01261967
\end{aligned}$$

En considérant les équations (6), (7), (8), on voit que le plus grand coefficient est le nombre qui multiplie z dans (8); on tire donc la valeur z de l'équation (8),

$$(9)\qquad z = 0,829040 - 0,498055\,y + 0,04422741\,u,$$

et, en substituant dans (6) et (7), on obtient

$$(10) \qquad 1,327084\,y - 59,38345\,u = 564,8517,$$

$$(11) \qquad 33,863900\,y + 3,693550\,u = 26,9439.$$

Résolvant alors (10) par rapport à u, il vient

$$(12) \qquad u = -9,51193 + 0,0223477\,y,$$

et puis, en substituant dans (11),

$$33,94644\,y = 62,0767,$$

d'où l'on déduit

$$y = 1,82866.$$

Enfin en remontant successivement aux équations (12), (9), (5), on trouve

$$u = -9,47106, \qquad z = -0,5006, \qquad x = 0,1181.$$

Vérification. — En portant ces valeurs dans l'équation (3) et calculant par logarithmes, on trouve

$$5,145 - 11,1200 - 26,03 + 58,7238$$

pour le premier membre; cette somme devrait être égale à 26,71432 pour que les valeurs et inconnues fussent exactes : or elle surpasse ce nombre de 0,00448; l'erreur totale correspondante à l'équation (3) est donc moindre que $\frac{1}{2}$ centième.

AUTRE MÉTHODE. — EMPLOI DES LOGARITHMES DE GAUSS.

305. Les calculs précédents sont très-pénibles; on peut les abréger lorsqu'on possède une Table de logarithmes de Gauss : ces Tables donnent $\log(\mu \pm \nu)$, lorsqu'on connaît $\log\mu$ et $\log\nu$, sans qu'on ait besoin de remonter aux nombres μ et ν. La première publication de ces Tables remonte à 1812.

Il suffit de montrer comment on passe d'un système à un autre qui a une équation et une inconnue de moins. Proposons-nous, par exemple, d'éliminer x entre les trois équations à trois incon-

nues

$$(1)\qquad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = l, \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z = l', \\ a''\,x + b''\,y + c''\,z = l'', \end{cases}$$

de manière à trouver un système de deux équations en y et z

$$(3)\qquad \begin{cases} \beta\,y + \gamma\,z = \lambda\,, \\ \beta'\,y + \gamma'\,z = \lambda'. \end{cases}$$

En divisant chacune des équations (1) par le coefficient de x, on obtient le système équivalent

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x + \dfrac{b}{a}\,y + \dfrac{c}{a}\,z = \dfrac{l}{a}, \\ x + \dfrac{b'}{a'}\,y + \dfrac{c'}{a'}\,z = \dfrac{l'}{a'}, \\ x + \dfrac{b''}{a''}\,y + \dfrac{c''}{a''}\,z = \dfrac{l''}{a''}, \end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + \mathrm{B}\,y + \mathrm{C}\,z = \mathrm{L}, \\ x + \mathrm{B}'\,y + \mathrm{C}'\,z = \mathrm{L}', \\ x + \mathrm{B}''\,y + \mathrm{C}''\,z = \mathrm{L}'', \end{cases}$$

et il suffit de retrancher ces dernières équations deux à deux pour avoir les deux équations en y et z cherchées,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{B} - \mathrm{B}')\,y + (\mathrm{C} - \mathrm{C}')\,z = \mathrm{L} - \mathrm{L}', \\ (\mathrm{B} - \mathrm{B}'')\,y + (\mathrm{C} - \mathrm{C}'')\,z = \mathrm{L} - \mathrm{L}'', \end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \beta\,y + \gamma\,z = \lambda, \\ \beta'\,y + \gamma'\,z = \lambda'. \end{cases}$$

On calcule B, C, L, B′, C′, L′,... par les équations

$$\log \mathrm{B} = \log b - \log a\,,\quad \log \mathrm{C} = \log c - \log a,\quad \log \mathrm{L} = \log l - \log a,$$
$$\log \mathrm{B}' = \log b' - \log a'\,,\quad \log \mathrm{C}' = \log c' - \log a',\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\log \mathrm{B}'' = \log b'' - \log a'',\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

puis pour avoir β, γ, λ, β',..., on retranche les coefficients précédents deux à deux.

Mais, ce qu'il faut surtout remarquer, c'est que les équations (3) ne sont que des équations de transition; on devra opérer bientôt sur elles comme on vient de le faire sur le système (1), en sorte que ce ne sont pas les nombres β, γ, λ,..., qui sont utiles à connaître, mais bien leurs logarithmes. Une Table qui donnerait directement $\log \beta$, $\log \gamma$,..., en fonction de $\log \mathrm{B}$, $\log \mathrm{B}'$, $\log \mathrm{C}$..., abrégerait donc les calculs d'une manière considérable; tel est l'office des Tables de Gauss.

306. En définitive, voici la marche à suivre :

On cherche d'abord les logarithmes de tous les coefficients du système (1), puis on écrit les équations symboliques

$$(1') \quad \begin{cases} x \log a + y \log b + z \log c = \log l, \\ x \log a' + y \log b' + z \log c' = \log l', \\ x \log a'' + y \log b'' + z \log c'' = \log l'', \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en divisant par les coefficients de x,

$$(2') \quad \begin{cases} x + y \log B + z \log C = \log L, \\ x + y \log B' + z \log C' = \log L', \\ x + y \log B'' + z \log C'' = \log L'', \end{cases}$$

et puis, par soustraction,

$$(3') \quad \begin{cases} y \log \beta + z \log \gamma = \log \lambda, \\ y \log \beta' + z \log \gamma' = \log \lambda'. \end{cases}$$

Ces équations se trouvent ainsi préparées pour le calcul suivant.

Les coefficients du système (2') sont donnés par les équations

$$\log B = \log b - \log a, \qquad \log C = \log c - \log a, \ldots$$

et ceux des équations (3')

$$\log \beta = \log (B - B'), \qquad \log \gamma = \ldots, \ldots$$

sont fournis immédiatement par les Tables. Tout se réduit donc à prendre les logarithmes des coefficients primitifs et à faire ensuite des soustractions.

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

307. On a souvent à résoudre des équations linéaires

$$\begin{aligned} a x + b y + c z + \ldots + l &= 0, \\ a' x + b' y + c' z + \ldots + l' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

dont les coefficients sont fournis par des expériences ou des observations, et alors il arrive presque toujours que le nombre m des équations surpasse le nombre n des inconnues. Les valeurs de $x, y, z, \ldots$, déduites de n des équations données ne peuvent pas

satisfaire exactement aux équations restantes, puisque les observations ne sont pas donées d'une précision absolue; leur substitution, au lieu d'annuler les premiers membres de ces équations, fournit des nombres plus ou moins petits,

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \varepsilon'', \ldots$$

qu'on nomme des *erreurs*, et qui varient avec les n équations que l'on prend pour déterminer $x, y, z, \ldots$.

On choisit alors parmi les équations données et parmi les combinaisons en nombre infini auxquelles elles peuvent donner lieu, n équations telles, que la somme des carrés

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots$$

des erreurs correspondantes soit minimum.

L'idée qui s'offre la première serait de *rendre minimum la somme des valeurs absolues des erreurs*; mais l'analyse ne se prête pas à cette condition qui exclut le signe des quantités; l'équation de condition exprimerait le minimum de l'excès des erreurs positives sur les erreurs négatives, et non celui de la somme des valeurs absolues des erreurs; elle n'indiquerait qu'une *compensation* d'erreurs, qui pourraient néanmoins avoir de grandes valeurs absolues. C'est pourquoi on est obligé de considérer une somme de *puissances paires* des erreurs, et pour ne pas être entraîné dans des calculs très-compliqués, on prend la *somme des carrés*.

308. Voici comment l'illustre Gauss résout ce problème (*Mémoires de Gottingue*, tome II).

Nous considérerons le cas simple de trois équations à deux inconnues x et y.

Soient donc x et y un couple de valeurs qui, substituées dans les équations

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + n &= 0, \\ a'\,x + b'\,y + n' &= 0, \\ a''x + b''y + n'' &= 0, \end{aligned}$$

donnent les erreurs $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$, en sorte qu'on a

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + n &= \varepsilon, \\ a'\,x + b'\,y + n' &= \varepsilon', \\ a''x + b''y + n'' &= \varepsilon''. \end{aligned}$$

Supposons qu'on ait calculé les sommes

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= (aa), \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= (bb), \\ n^2 + n'^2 + n''^2 &= (nn); \\ ab + a'b' + a''b'' &= (ab), \\ an + a'n' + a''n'' &= (an), \\ bn + b'n' + b''n'' &= (bn); \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} S = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 = (nn) &+ 2(an)x + 2(bn)y \\ &+ (aa)x^2 + 2(ab)xy \\ &+ (bb)y^2. \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$A = (an) + (aa)x + (ab)y,$$

l'expression

$$\begin{aligned} S - \frac{A^2}{(aa)} = (nn) &- \frac{(an)^2}{(aa)} \\ &+ 2y\left[(bn) - \frac{(an)(ab)}{(aa)}\right] \\ &+ y^2\left[(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)}\right] \end{aligned}$$

est indépendante de x; on peut lui donner la forme

$$S - \frac{A^2}{(aa)} = (nn,1) + 2(bn,1)y + (bb,1)y^2,$$

les coefficients étant calculés d'après les équations

$$\begin{aligned} (nn,1) &= (nn) - \frac{(an)^2}{(aa)}, \\ (bn,1) &= (bn) - \frac{(an)(ab)}{(aa)}, \\ (bb,1) &= (bb) - \frac{(an)^2}{(aa)}. \end{aligned}$$

Cela fait, posons encore

$$B = (bn,1) + (bb,1)y,$$

Digitized by Google

l'expression

$$S - \frac{A^2}{(aa)} - \frac{B^2}{(bb,1)} = (nn,1) - \frac{(bn,1)^2}{(bb,1)}$$

est indépendante de y ; calculons-la et désignons le résultat par $(nn,2)$, il viendra

$$S = \frac{A^2}{(aa)} + \frac{B^2}{(bb,1)} + (nn,2);$$

S étant une somme de carrés, et par conséquent plus grande que zéro, et les diviseurs (aa), $(bb,1)$ étant positifs (**309**), le minimum de S aura lieu pour

$$A = 0, \quad B = 0,$$

c'est-à-dire pour

$$(an) + (aa)x + (ab)y = 0,$$
$$(bn,1) + (bb,1)y = 0.$$

Ces équations sont faciles à résoudre ; il n'y a pas d'élimination à faire ; la dernière donne y, dont la valeur substituée dans la première la réduira au premier degré en x seul.

309. On a dit plus haut que les diviseurs (aa), $(bb,1)$ étaient positifs ; cette assertion, évidente pour (aa), qui est une somme de carrés, demande démonstration pour $(bb,1)$.

Or, on a

$$(bb,1) = (bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} = \frac{(bb)(aa) - (ab)^2}{(aa)},$$

et le numérateur est une somme de trois carrés

$$(ab' - ba')^2 + (ab'' - ba'')^2 + (a'b'' - b'a'')^2.$$

Rien n'est plus facile que de généraliser la belle méthode précédente, que Gauss a si heureusement appliquée à la correction des éléments de la planète Pallas. (Exercice I.)

EXERCICES.

I. Résoudre les équations

$$0,0382025\,x - 0,00655533\,y - 0,0718334\,z + 0,0565703\,u = 124944,66,$$

$$0,0465752\,x - 0,00407850\,y - 0,0915866\,z + 0,0362259\,u = 152292,21,$$

$$0,0517211\,x + 0,00054720\,y - 0,1032346\,z - 0,0049063\,u = 168846,94,$$

$$0,0323338\,x + 0,00305495\,y - 0,0634685\,z - 0,0271300\,u = 105498,00.$$

On trouve

$$x = 3348538, \quad y = 1218098, \quad z = 41798, \quad u = 141587,4.$$

II. Appliquer la méthode des moindres carrés au système

$$0 = -183'',93 + 0,79363\,x + 143,66\,y + 0,39493\,z + 0,95920\,u - 0,18856\,v + 0,17387\,t,$$

$$0 = -6'',81 - 0,02658\,x + 46,71\,y + 0,02658\,z - 0,20858\,u + 0,15946\,v + 1,25782\,t,$$

$$0 = -0'',06 + 0,58880\,x + 358,12\,y + 0,26208\,z - 0,85234\,u + 0,14912\,v + 0,17775\,t,$$

$$0 = -3'',09 + 0,01318\,x + 28,39\,y - 0,01318\,z - 0,07861\,u + 0,91704\,v + 0,54365\,t,$$

$$0 = -0'',02 + 1,73436\,x + 1846,17\,y - 0,54603\,z - 2,05662\,u - 0,18833\,v - 0,17445\,t,$$

$$0 = -8'',98 - 0,12606\,x - 227,42\,y + 0,12606\,z - 0,38939\,u + 0,17176\,v - 1,35441\,t,$$

$$0 = -2'',31 + 0,99584\,x + 1579,03\,y + 0,06456\,z + 1,99545\,u - 0,06040\,v - 0,33750\,t,$$

$$0 = +2'',47 - 0,08089\,x - 6722\,y + 0,08089\,z - 0,09970\,u - 0,46359\,v + 1,22803\,t,$$

Digitized by Google

$$0 = + 0'',01 + 0,65311\,x + 1329,09\,y + 0,38994\,z - 0,08439\,u - 0,04305\,v + 0,34268\,t,$$

$$0 = - 317'',73 + 0,69957\,x + 1719,32\,y + 0,12913\,z - 1,38787\,u + 0,17130\,v - 0,08360\,t,$$

$$0 = + 117'',97 - 0,01315\,x - 43,84\,y + 0,01315\,z + 0,02929\,u + 1,02138\,v - 0,27187\,t.$$

On est conduit aux équations

$$0 = + 17'',11 + 5,42383\,t,$$

$$0 = + 75'',23 + 2,22346\,v - 0,37766\,t,$$

$$0 = + 25'',66 + 9,29213\,u - 0,36175\,v - 0,57384\,t,$$

$$0 = - 115'',81 + 0,71612\,z + 1,11063\,u - 0,06392\,v + 0,25868\,t,$$

$$0 = - 13854'' + 2458225\,y + 62,13\,z - 0,5\,058\,u + 213,84\,v + 73,45\,t,$$

$$0 = - 371'',09 + 5,91569\,x + 7203,91\,y - 0,00344\,z - 2,20516\,u - 0,34664\,v - 0,18191\,t;$$

d'où l'on déduit

$$t = - 3'',15, \quad v = - 34'',37, \quad u = - 4'',29,$$
$$z = - 166'',44, \quad y = + 0'',054335, \quad x = - 3'',06.$$

(GAUSS, Corrections des éléments de Pallas.)

III. Appliquer la méthode des approximations successives à l'équation

$$ax^3 - bx + c = 0,$$

où a, b, c sont des nombres positifs.

FIN.

SBN 608923

Digitized by Google

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

Ouvrage donné en **PRIX** par la **Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale**, aux **CONTRE-MAITRES DES ÉTABLISSEMENTS INDUSTRIELS**.

COURS COMPLET DE DESSIN LINÉAIRE, GRADUÉ ET PROGRESSIF,

contenant :

La Géométrie pratique, élémentaire et descriptive; l'Arpentage, la Levée des plans et le Nivellement; le Tracé des Cartes géographiques; les Notions sur l'Architecture ; le Dessin industriel; la Perspective linéaire et aérienne ; le Tracé des Ombres et l'Étude du Lavis ;

PAR M. L. DELAISTRE,
Professeur de Dessin.

Quatre Parties composées de 60 Planches et 60 pages de texte in-4° oblong à deux colonnes, tirées sur jésus.

Prix de l'ouvrage complet, broché .... 18 fr.
— cartonné ... 19 fr. 50 c.

MM. les Professeurs et les Élèves pourront se procurer les planches *séparément* sans le texte.

Prix de chaque planche... 25 c.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE

Des Candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles du Gouvernement rédigée conformément aux PROGRAMMES OFFICIELS des Lycées ;

PAR M E. LIONNET,
Agrégé de l'Université, Professeur de Mathématiques pures et appliquées au Lycée Louis-le-Grand, Examinateur suppléant d'admission à l'École Navale.

In-8 avec figures dans le texte; 1855. — Prix : 3 fr. 50 c.

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

PAR M. LEROY.
Quatrième édition, revue et annotée

PAR M. MARTELET,
Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures.

Un volume in-4, avec Atlas de 71 planches, 1855. — Prix : 16 francs.

Paris. — Imprimerie de MALLET BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE,

PAR S.-F. LACROIX,
Membre de l'Institut.

17e édit., rédigée conformément aux Programmes de l'enseignement dans les Lycées,

Par M. PROUHET,
Professeur de Mathématiques.

PREMIÈRE PARTIE, Géométrie plane. (CLASSE DE TROISIÈME.)
SECONDE PARTIE, Géométrie dans l'espace. (CLASSE DE SECONDE.)
TROISIÈME PARTIE, Complément de Géométrie. (CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.)
QUATRIÈME PARTIE, Notions sur les courbes usuelles. (CLASSE DE RHÉTORIQUE.)

Une table des matières, très-détaillée, résume tout l'ouvrage et facilite la révision de ses diverses parties.

Volume in-8, avec 220 figures dans le texte; 1855... 4 francs.

« La Géométrie de Lacroix, *étant celle dont les Programmes actuels se rapprochent le plus*, sera mise entre les mains des élèves, *jusqu'à ce qu'un ouvrage complétement conforme aux Programmes ait pu être prescrit.* »

Ces paroles, que nous empruntons à l'Instruction générale sur l'exécution du plan d'études des Lycées, expliquent suffisamment le but que l'on s'est proposé dans cette *nouvelle édition des Éléments de Géométrie*. Entièrement conforme au Programme par l'ordre des matières et par les méthodes de démonstration, l'ouvrage est divisé en quatre Parties, dont chacune comprend l'enseignement géométrique donné à l'une des classes de nos Lycées (*section des Sciences*).

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

MEMOIRES SUR LA COMBINAISON DES OBSERVATIONS,

PAR M. CH.-FR. GAUSS.

Traduits en français et avec l'autorisation de l'auteur,

PAR M. J. BERTRAND.

Un volume in-8°, 1855. — Prix : 4 francs.

ÉLÉMENTS

DE

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE,

PAR MM. DELISLE ET GERONO.

Quatrième édition, in-8, avec planches, 1855. — Prix : 3 fr. 50 c.

Paris. — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google